Table des matières

I Equations scalaires

I.1 Equations d'ordre 1

Définition 1
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{E}$$

avec a, b des fonctions définies sur un intervalle I. L'équation homogène associée à E est

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{E_H}$$

On appelle solution de E toute **fonction** dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. Les courbes représentatives des fonctions solutions sont appelées *courbes intégrales* de l'équation.

Le problème consistant trouver une solution de E vérifiant en plus une condition du type $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$ et $y_o \in \mathbb{K}$) est appelé un problème de Cauchy . On parle de condition initiale.

Théorème 1 (Résolution de l'équation homogène)
Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et A une **primitive** de a sur I. Pour une fonction $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ les assertions suivantes sont équivalentes

1. $E_H \ \forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = 0$
2. $\exists \lambda \in \mathbb{K} \ \forall t \in I \ y(t) = \lambda e^{-A(t)}$.

Ainsi, à chaque scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ correspond exactement une fonction solution y et on remarque que toutes les fonctions solutions sont proportionnelles.

Si de plus on donne $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ pour transformer cette équation en problème de Cauchy en lui adjoignant la condition $y(t_0) = y_0$, alors ce problème de Cauchy possède une unique solution.

Théorème 2 (Cauchy)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Etant donné $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution (sur I) y de l'équation différentielle E qui vérifie $y(t_0) = y_0$.

Proposition 1
L'ensemble des solutions de E sur I est un espace affine de dimension 1, c'est à dire que toute solution y est de la forme $y_p + y_H$ où y_p est l'une des solutions de E (appelée solution particulière) et y_H est une solution quelconque de E_H.

I.2 Equation d'ordre 2

Définition 2
On considère l'équation (E_H) sur $\mathbb{R}$: $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$.

L'équation caractéristique associée est $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Théorème 3 (Résolution de l'équation homogène, cas complexe)
On considère $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs complexes**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_H) ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right.$$
2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_H) ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{array} \right.$$

Si de plus on se donne $t_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{C}$, alors il existe une unique solution y de l'équation différentielle homogène qui vérifie $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.

Théorème 4 (Résolution de l'équation homogène, cas réels)
On considère $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs réelles**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{R}$, alors les solutions à valeurs réelles de (E_H)) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$
2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Si l'équation possède deux solutions non réelles, qui sont donc complexes conjuguées et notée $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

De la même manière, un problème de Cauchy réel possède une unique solution.

Théorème 5
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$ et soit $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

1. Soient $t_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy (sur I)
$$\left\{ \begin{array}{rcl} ay''(t) + by'(t) + cy(t) & = & d \\ y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y_0' \end{array} \right.$$
admet une unique solution.
2. L'équation différentielle linaire
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$
admet au moins une solution y_p sur I, et l'ensemble de ses solutions est $y_p + \mathcal{S}_0$ où $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Proposition 2 (Principe de superposition)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ vérifient $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$ et $ay_2'' + by_2' + cy = f_2$. Alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cb = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

I.3 Ordre 2, coefficients non constants

Théorème 6 (Cauchy-Lipschitz)
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soient également $t_0 \in I$, $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$
possède une unique solution $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ définie sur I.

Théorème 7
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. L'ensemble des solutions sur I de l'équation $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ est un espace affine de dimension 2. Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Plus précisément, les solutions de (E_H) $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ sont de la forme $t \mapsto \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$ (pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ quelconques) où y_1, y_2 sont solutions de (E_H) et **non proportionnelles** et toute solution de (E) est de la forme $y_p + y_H$ où y_p est une solution particulière de (E) et y_H une solution quelconque de (E_H).

II Systèmes différentiels linéaires

II.1 Cauchy-Lipschitz

Définition 3
Soit $Y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}^n)$ une fonction à valeurs vectorielles. On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Soient également $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Le système d'équations différentielles $Y' = AY + B$ est appelé un système différentiel linéaire à n équations et n inconnues, à coefficients constants.
2. Le système homogène associé est $Y' = AY$. Il est défini sur $\mathbb{R}$ a priori.
3. Résoudre un tel système, c'est trouver toutes les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ le vérifiant.
4. Soit $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{K}^n$. On appelle problème de Cauchy (en (t_0, Y_0)) le système $\begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$

Théorème 8
Avec les notations de la définition, un problème de Cauchy possède une unique solution.

Les hypothèses sont $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, I est un intervalle infini et $t_0 \in I$.

Théorème 9
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (H) le système différentiel $Y' = AY$. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n.

Si $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, l'ensemble des solution de $Y' = AY + B$ est un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_H$, c'est à dire que les solutions sont de la même forme que pour les équations scalaires précédentes.

II.2 Cas A diagonalisable

Proposition 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathbb{K}$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres et $V_1, \ldots, V_n$ des vecteurs propres associés, qui forment une base de $\mathbb{K}^n$.

Alors l'ensemble des solutions de $Y' = AY$ est $\text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1, \ldots, t \mapsto e^{\lambda_n t} V_n)$.

II.3 Lien avec les équations scalaires à coefficient constant