Table des matières

I Isométries

I.1 Groupe orthogonal en dimension 2

Définition 1
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Proposition 1 (Caractérisation de $\boldsymbol{O_2}(\mathbb{R})$)
Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$.

1. $M \in SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe θ tel que $M = R_\theta$. Ainsi les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent entre elles.
2. $\det M = -1$ ssi M est de la forme S_θ

I.2 Groupe orthogonal en dimension 3

Définition 2
Si f est la rotation d'angle θ autour de l'axe $D = \text{Vect}(u)$ orienté par le vecteur unitaire u, alors dans toute base orthonormée de la forme $\mathcal{B} = (u, v, w)$ (le premier vecteur doit être u) on a

$$\text{Mat}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

L'interprétation géométrique est la suivante : $\text{Vect}(u)$ est la droite des points fixes, et dans $P = \text{Vect}(v, w) = \text{Vect}(u)^\perp$, f est la rotation d'angle θ.

On dit que l'axe de f est orienté par u, car l'angle de rotation dans l'espace dépend de la direction selon laquelle on observe le plan P. Le sens de u donne le “dessus” de P et donc le côté par lequel on observe P pour que l'angle soit bien θ. On on change le sens de u (qui devient donc $-u$), alors l'angle de la même rotation devient $-\theta$.

Proposition 2
Soit $f \in O(E)$ une isométrie d'un espace euclidien. Alors si f possède une valeur propre λ réelle, on a $\lambda = \pm 1$.

Théorème 1
Soit $f \in O(E)$ avec E de dimension 3.

1. Si $\det f = 1$ alors f est une rotation de l'espace (ou un retournement qui est une rotation d'angle π).
2. Si $\det f = -1$, alors f est soit une réflexion soit la composée d'une réflexion et d'une rotation (l'axe de rotation étant orthogonal au plan de réflexion).

II Coniques

II.1 Forme réduite

Définition 3
Une conique de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points $M : (x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ et $d, e, f \in \mathbb{R}$.

Définition 4
Soient $a, b, p > 0$. On appelle équation réduite de conique les équations suivantes :

— $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)
— $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)
— $y^2 = 2px$ (parabole)

II.2 Tracés

II.3 Réduction d'une conique