

I Géométrie du plan

Exercice 1 (Techniques de base)

Le plan est rapporté à une repère orthonormé direct, dont la base est la base canonique et le centre noté O .

1. Donner le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$.
2. Donner une équation de la droite \mathcal{D}_1 passant par $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et normale à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
3. Même question pour \mathcal{D}_2 passant par A et dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
4. Même question avec \mathcal{D}_3 passant par A et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. Donner deux points, un vecteur normal et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_4 : 2x - y + 2 = 0$.
6. Trouver les coordonnées du point d'intersection \mathcal{D}_4 et de la droite passant par B et perpendiculaire à \mathcal{D}_4 . Interpréter géométriquement ce point.

Exercice 2

Posons $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire. On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .

1. Donner la matrice R canoniquement associée à la rotation r telle que $r(e_1) = \vec{u}$. Préciser son angle $\theta \in [-\pi, \pi]$ en fonction de a et b .
Indication : l'expression de l'angle dépend fortement des signes de a et b .
2. On note $\mathcal{D} = \text{Vect}(u)$. Donner la matrice S canoniquement associée à la réflexion d'axe \mathcal{D} .
3. Vérifier que $S \in O_2(\mathbb{R})$ et que $\det(S) = -1$.
4. Interpréter géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à RS .
5. Même question avec SR .

II Géométrie de l'espace

Exercice 3 (Techniques de base)

On rapporte l'espace à une repère orthonormé direct dont la base est la base canonique.

1. Donner un vecteur directeur ainsi qu'une représentation paramétrique¹ de \mathcal{D} la droite passant par $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. On cherche une courbe paramétrée dont le support est \mathcal{D}

2. Trouver un système d'équation cartésienne de \mathcal{D} .
3. Donner un point, une base et un vecteur normal de $\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z + 2 = 0$.
4. Donner une équation cartésienne de \mathcal{P}_2 , le plan passant par $A : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et normal à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. Donner une équation cartésienne de \mathcal{P}_3 , le plan passant par A et dont une base est $(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
6. Justifier que les plans \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 ne sont pas parallèles. On note $\mathcal{D}_2 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Donner un point et un vecteur directeur de \mathcal{D}_2 .

Exercice 4

Décrire les endomorphismes de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 euclidien de matrices dans la base canonique :

$$\text{a) } \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

III Coniques

Exercice 5

Déterminer tous les éléments des coniques d'équation

$$\begin{aligned} x^2 + 8xy - 5y^2 - 21 &= 0 \\ 9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 &= 0 \\ 9x^3 + 4xy + 6y^2 + \alpha &= 0 \end{aligned}$$

avec $\alpha = -20, 0, 20$.

Exercice 6

Soit A le point de coordonnée $(1, 0)$. On considère la parabole $\mathcal{P} : y^2 + x = 1$ et l'ellipse \mathcal{E} d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$.

Pour tout $m \neq 0$, on considère la droite $\Delta_m : y = m(1 - x)$ passant par A .

1. Représenter \mathcal{P} et \mathcal{E} sur un même graphique.
2. Δ_m coupe \mathcal{P} en A et un autre point M et coupe \mathcal{E} en A et un autre point N . Déterminer les coordonnées de M et N .

3. Déterminer des équations des tangentes en M et N à \mathcal{P} et \mathcal{E} respectivement. On pourra passer par une représentation paramétrique.
4. Ces deux tangentes s'intersectent en I_m . Déterminer le lieu des I_m lorsque m décrit \mathbb{R}^* .