Devoir surveillé n°4

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer le devoir.

Exercice 1 (Cours)

1. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.
2. Donner les solutions sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' - \frac{2}{x}y = 0$.
3. Donner la définition du rang d'une matrice M.
4. Donner l'ensemble des solutions de $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \end{cases}$ d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$.
5. Effectuer le produit matriciel $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$
6. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' - 8y = 6e^{2x}$.

Exercice 2

Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x + \ \ y + z = 2 \\ x + \ \ y - z = 0 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + y - \ \ z = 1 \\ 6x + y - 3z = -1 \\ 2x \qquad - \ \ z = -1 \end{cases}$
3. Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Décrire en fonction de sa valeur les solutions de
$\begin{cases} x & + & my & + & (m+1)z & = & 1 \\ mx & + & y & + & z & = & m \\ (1-m)x & + & (m-1)y & + & m^2 z & = & 0 \end{cases}$

Exercice 3

On souhaite résoudre l'équation différentielle $(E) : xy' + y = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie I

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Même question, mais sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$. On prendra soin de noter la constante qui apparaît avec une lettre différente de la question précédente.
3. A quelles conditions sur les 2 constantes trouvées précédemment, les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ possèdent-elles une limite finie en 0 ?
4. Trouver une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Vérifier que la fonction trouvée à la question précédente est encore une solution sur $\mathbb{R}_-^*$.
6. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II

On pose maintenant $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{x} \end{array} \right.$.

1. Etudier la parité de f.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'.
3. Etude de la limite de f en 1.
   (a) Démontrer le théorème suivant :

   Théorème
   Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $m, M \in \mathbb{R}$ qui vérifient

   $$\forall t \in [a, b] \ m \leqslant g'(t) \leqslant M$$

   Alors $m(b-a) \leqslant g(b) - g(a) \leqslant M(b-a)$.

   (b) Montrer que pour $b \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(b) \leqslant b$ et $b \leqslant \tan(b)$.

   (c) Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, en déduire un encadrement de $\frac{\sin(x)}{x}$.

(d) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$. En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$

4. On pose maintenant $f(0) = 1$ et la fonction f devient définie par $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$. Que peut-on dire de la continuité de f ?
5. On s'intéresse maintenant à la dérivabilité de f en 0. Pour cela on pose $h : x \mapsto \sin(x) - x - \frac{x^3}{6}$
   (a) On admet que h est dérivable 3 fois sur $\mathbb{R}$. Donner les variations et le signe de h'', h' puis h.
   (b) On peut montrer de la même manière que pour $x \geqslant 0$ on a $-\frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) - x$. Justifier l'encadrement $\forall x \in \mathbb{R} |\sin(x) - x| \leqslant \left|\frac{x^3}{6}\right|$.
   (c) En déduire que f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$.
6. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ puis que c'est la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ solution de (E).

Exercice 4

On considère a fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -x + 6y \end{pmatrix} \end{array}\right.$

1. Calculer $f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $f\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.
3. Résoudre l'équation $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$.
4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Justifier que l'équation $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ possède une unique solution. Quelle est l'interprétation pour la fonction f ?
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Ecrire sous forme d'un système linéaire l'équation $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (toujours les mêmes inconnues) puis donner le rang de ce système en fonction de λ.
6. Donner l'ensemble des solutions de $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, en fonction de λ.
7. On pose $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Exprimer $f(U)$ en fonction de U et $f(V)$ en fonction de V.
8. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On pose $g_1 = f,\ g_2 = f \circ f$ et plus généralement $g_n = f \circ f \cdots \circ f$ (la fonction $f$composée n fois avec elle même). Calculer $g_2(U), g_3(U)$ en fonction de U et n seulement, puis trouver et prouver une expression de $g_n(U)$.
9. Calculer $g_n(V)$ en fonction de V et n.
10. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $X = \alpha U + \beta V$.
11. Avec les notations de la question précédente, calculer $g_n(X)$ en fonction de α, β, U, V puis en fonction de x, y.

Exercice 5

1. (a) Calculer sur chaque intervalle où c'est possible (en précisant ces intervalles), une primitive de $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$.
   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$. On souhaite calculer $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-b)^2-a^2}$. Préciser les intervalles où ce calcul est possible puis calculer ces primitives.
2. (a) Soit $\alpha \in]-\infty, 0]$. Montrer que l'on peut calculer l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-2\alpha t+\alpha t^2}$.
   (b) On pose maintenant $F : x \mapsto \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-2xt+xt^2}$ définie sur $\mathbb{R}^-$ Calculer $F(0)$.
   (c) Pour $x < 0$, calculer explicitement $F(x)$. On pourra penser à factoriser par x le dénominateur.

Exercice 6

Soient 4 points A, B, C, D du plan (rapporté à un repère orthonormé direct) d'abcsisses 2 à 2 distinctes. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale P de degré 3 ou moins telle que la courbe représentative de P passe par ces 4 points.