

Table des matières

I Etude de courbes : rappels

I.1 Courbes dans \mathbb{R}^2 1

I.2 Tangentes, variations 1

I.3 Points singuliers 1

I.4 Branches infinies 1

II Etude métrique

II.1 Longueur d'une courbe 1

II.2 Abscisse curviligne 1

II.3 Repère de Frenet 2

II.4 Courbure 2

III Enveloppe, développée

III.1 Courbe développée 2

III.2 Enveloppe 2

I Etude de courbes : rappels

I.1 Courbes dans \mathbb{R}^2

Définition 1

Une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k dans \mathbb{R}^2 est une fonction $f : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto M(t) \end{cases}$. Le **support** de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble des points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M).

Définition 2

Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

I.2 Tangentes, variations

Théorème 1

Si t_0 est un point régulier de la courbe f alors f possède une tangente en t_0 dirigée par $f'(t_0)$.

I.3 Points singuliers

I.4 Branches infinies

Définition 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \bar{I}$. On dit que f possède une branche infinie au voisinage de a si x et y admettent une limite en a et qu'on est dans un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote horizontale (seulement $y(t)$ tend vers l'infini) ou verticale (seulement $x(t)$ tend vers l'infini).
2. ces deux limites sont infinies.
 - (a) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Ox) .
 - (b) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Oy) .
 - (c) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ il y a deux cas
 - i. si $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f .
 - ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente m .

II Etude métrique

II.1 Longueur d'une courbe

Définition 4

Soient $a, b \in I$. On appelle longueur (algébrique) de $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ entre les points a et b le réel $\int_a^b \|f'(t)\| dt$.

II.2 Abscisse curviligne

Définition 5

Soit $t_0 \in I$.

On appelle abscisse curviligne de f d'origine t_0 la fonction $s : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du \end{cases}$.

Proposition 1

On considère une courbe régulière f de classe \mathcal{C}^k .

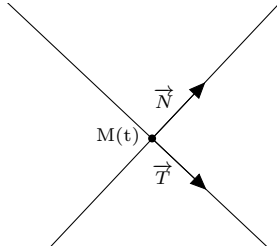
L'abscisse curviligne d'origine t_0 est un \mathcal{C}^k difféomorphisme de I sur son image, c'est à dire que c'est une bijection \mathcal{C}^k dont la réciproque est \mathcal{C}^k .

II.3 Repère de Frenet

Définition 6

Soit $t \in I$. On note $\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ (vecteur unitaire tangent de f en t) et $\vec{N}(t)$ (vecteur unitaire normal de f en t) le vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{T}(t)$.

Le repère $(f(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ est appelé repère de Frenet de f en t .



Théorème 2 (Détermination angulaire)

Il existe une fonction $\alpha \in C^{k-1}(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I \quad \vec{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j} = \vec{u}_{\alpha(t)}.$$

Ainsi $\alpha(t)$ est l'angle entre \vec{i} et $\vec{T}(t)$.

Proposition 2

1. On a alors $\overrightarrow{N}(t) = -\sin \alpha(t)\vec{i} + \cos \alpha(t)\vec{j} = \vec{v}_{\alpha(t)}$
2. Comme $\vec{T} = \frac{df}{ds}$, on en déduit que $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$ et $\frac{dy}{ds} = \sin \alpha$.

II.4 Courbure

Définition 7

On appelle courbure la dérivée de la fonction α par rapport à s :

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$$

Comme α est un angle, il n'a pas d'unité. γ s'exprime donc en m^{-1} .

Théorème 3 (Formules de Frenet)

On a

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma\vec{T}$$

III Enveloppe, développée

III.1 Courbe développée

Définition 8

Un point d'une courbe paramétrée est dit birégulier ssi les vecteurs vitesse et accélération en ce point ne sont pas colinéaires. On a donc (avec les notations classiques) les entiers p et q qui valent $p = 1$ et $q = 2$.

Proposition 3

Pour une courbe C^2 , le point de paramètre t est birégulier ssi $\gamma(t) \neq 0$.

Définition 9

Soit $f \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière (tous les points sont biréguliers). Le rayon de courbure au point t est $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$ et le centre de courbure est le point $C(t) = M(t) + R(t)\vec{N}(t)$ ie $\overrightarrow{MC} = R\vec{N}$.

On peut évidemment repérer M par son abscisse curviligne et exprimer toutes les quantités en fonction de s .

Définition 10

Le lieu des centres de courbure d'une courbe s'appelle la courbe développée. C'est la courbe $t \mapsto C(t)$.

III.2 Enveloppe

Définition 11

Soit $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ une famille de droite. On dit que $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ admet la courbe $f : t \mapsto M(t)$ comme enveloppe ssi pour tout $t \in I$ on a

1. $M(t) \in \mathcal{D}_t$
2. \mathcal{D}_t est tangente à f en $M(t)$.

Proposition 4

Une enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = A(t) + \text{Vect}(\vec{u}(t))$ est donnée par $f : t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ où λ est une fonction vérifiant $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$.

Proposition 5

Soit $f \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière. La courbe développée de f est également l'enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = M(t) + \text{Vect}(\vec{N}(t))$ (la famille des normales).

On peut remplacer le vecteur $\vec{N}(t)$ par n'importe quel vecteur proportionnel et non nul.