Plan tangent

Exercice 1
Trouver les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+4z^2=1$ et parallèles au plan d'équation $x+2y+z=0$.

Exercice 2
Soit $a>0$, et soit Γ l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=a^2$ et du cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2-ax=0$.

1. Déterminer une paramétrisation de Γ.
2. Quel est la tangente à Γ en l'un de ses points ?
3. Soit P le point d'intersection de la tangente à Γ en un point M avec le plan $(x0y)$. Déterminer le lieu de P lorsque M parcourt Γ.

Exercice 3
Soit $\mathcal{S}$ l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

où a , b et c sont trois réels strictement positifs.

Déterminer les plans tangents à S qui recoupent les axes Ox , Oy et Oz en trois points A, B et C tels que $OA=OB=OC$.

Surfaces réglées

Exercice 4
Montrer que la surface S paramétrée par $\begin{cases} x=3u+v \\ y=2u^2+2uv \\ z=u^3v \end{cases}$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ est réglée.

Exercice 5
Soit $\mathcal{S}$ la surface définie par les équations paramétriques

$$x=u^2 \quad , \quad y=uv \quad , \quad z=u-v$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une surface réglée.
Donner le plan tangent en un point régulier.

Exercice 6
Donner une représentation paramétrique ainsi qu'une équation cartésienne du cône de directrice $\Gamma : \begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=t^2 \\ z(t)=t+1 \end{cases}$ et de sommet $\Omega : \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 7
Donner une équation cartésienne du cylindre Σ de directrice $\Gamma : \begin{cases} x^2+2y^2-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ et de direction $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Révolution

Exercice 8
On considère une surface S d'équation $f(x^2+y^2,z)=0$. Montrer que S est une surface de révolution autour de (Oz). Etudier la réciproque.

Exercice 9
On considère la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\begin{cases} x(t)=\cos^3(t) \\ y(t)=\sin^3(t) \\ z(t)=\cos(2t) \end{cases}$, $t\in[-\pi,\pi]$. Déterminer une équation de la surface de révolution de $\mathcal{C}$ autour de (Oz).

Exercice 10
Soit $S:(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2-z^2)$ (où $a>0$ est fixé). Montrer que S est une surface de révolution autour d'un axe à préciser et tracer une méridienne. [1]

1. Indication : pour la méridienne, on pourra d'abord chercher une équation sur les coordonnées polaires.