Devoir surveillé n°5

Durée : 4H (vous pouvez, si réelle nécessité, couper ce devoir en 2 fois 2H, mais je vous déconseille de plus tronçonner). Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Application du cours)

1. Donner l'interprétation géométrique de l'endomorphisme canoniquement associé à
   (a) $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -2y_2 + y_1 \end{cases}$
3. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $p \in]0,1[$.
   Rappeler la définition des fonctions génératrices de X_1 et X_2, les calculer, et en déduire la loi de $Y = X_1 + X_2$.

Exercice 2

1. On considère la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t$. Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer h'.
2. On pose $F : x \mapsto e^{-x^2} h(x)$. Montrer que F est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :
   $$y'(x) = -2xy(x) + 1 \quad (\mathcal{E})$$
3. En appliquant des théorèmes du cours et en évitant les calculs, montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
4. On cherche le développement en série entière de F sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Donner une relation de récurrence vérifiée par les a_n pour $n \geqslant 0$.
5. Que vaut $F(0)$? En déduire $F'(0)$ puis les valeurs de a_0 et a_1.
6. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p. On attend ici une justification précise.
7. En déduire le développement en série entière de F.

Exercice 3

Partie I

On considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \quad (E)$$

1. On pose, pour $x \in]-1, 1[$,
   $$F(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right)$$
   Montrer que F est solution de l'équation (E) sur $]-1, 1[$.
2. Donner la solution générale de l'équation (E_0) : $(1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 0$ sur $]-1, 1[$.
3. A l'aide de la méthode de variation de la constante, donner la solution générale sur $]-1, 1[$ de (E).
4. Justifier qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy
   $$\begin{cases} (1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
5. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$ pour $x \in]-1, 1[$, faisant intervenir la fonction arcsin.

Partie II

On considère cette fois la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$$

1. Justifier que f est bien définie sur $]-1,1[$ et calculer $f(0)$.
2. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que f est dérivable sur $[-a,a]$ et exprimer f'.
3. Etudier la dérivabilité de f sur $]-1,1[$.
4. On admet qu'un calcul long et fastidieux montre que f vérifie l'équation différentielle (E). En déduire une expression de f sans symbole intégrale.
5. Calculer, pour $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) - x}{(1 - x\cos(t))^2}\mathrm{d}t$

Exercice 4
Dans tous cet exercice, les matrices considérées sont à coefficients exclusivement réels.

Partie I

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, ainsi que $S = {}^tAA$. On pose également $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer, sans calculer ses coefficients, que S est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$, voir le préambule).
2. Calculer $\det(A)$ et en déduire que 0 n'est pas une valeur propre de S.
3. Calculer S, puis exhiber une matrice D diagonale et une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$.
4. Montrer que B est diagonalisable et exhiber une matrice diagonale Δ ainsi qu'une matrice orthogonale $Q \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $B = Q\Delta{}^tQ$.
5. Donner la nature (sans préciser les éléments géométriques) de l'endomorphisme canoniquement associé à P.
6. Exhiber une matrice Δ' telle que $(\Delta')^2 = \Delta$, puis une matrice C telle que $B = {}^tCC$.
7. Quelle propriété des valeurs propres de B assure que Δ' existe ?

Partie II

On fixe $n \geqslant 2$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = {}^tAA$.
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, donné par $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n \ (X|Y) = {}^tXY$.

1. Montrer que S est symétrique.
   On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (non forcément distinctes), $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée pour le produit scalaire canonique, composée de vecteurs propres de S (X_i est associé à λ_i pour tout $i \in [\![1,n]\!]$).
   On pose finalement P la matrice dont les colonnes sont les X_i et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$.
   Donner les coefficients de D.
2. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. En calculant $\|AX_i\|^2$, montrer que $\lambda_i \geqslant 0$.
3. Montrer que S est inversible ssi A est inversible.
4. A quelle condition sur les valeurs propres de A peut-on assurer que $\forall i \in [\![1,n]\!] \ \lambda_i > 0$?
5. Dans cette question, on suppose que A est inversible.
   (a) On considère l'application φ définie, pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$ par $\varphi(X,Y) = {}^tXSY$. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer que $\mathcal{B}' = (\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}X_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}X_n)$ est une base orthonormée pour le produit scalaire défini par φ.
6. Trouver une matrice Δ telle que $\Delta^2 = D$ puis une matrice R symétrique à valeurs propres positives telle que $R^2 = S$.
7. Soit M une matrice symétrique à valeurs propres positives telle que $M^2 = S$. Le but de cette question est de montrer que $M = R$.
   (a) Soit $\alpha \in Sp(M)$. Montrer que $\ker(M - \alpha I_n) \subset \ker(S - \alpha^2 I_n)$.
   (b) On note $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les valeurs propres distinctes de M. Montrer que les $\alpha_1^2, \dots, \alpha_p^2$ sont deux à deux distincts.
   (c) Justifier que $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} \ker(M - \alpha_k I_n) = \mathbb{R}^n$. En déduire que $\forall k \in [\![1,p]\!] \ \ker(M - \alpha_k I_n) = \ker(S - \alpha_k^2 I_n)$.
   (d) Qu'en déduire pour la matrice ${}^tPMP$?
   (e) Montrer que $M = R$.