BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

La première partie est indépendante du reste du sujet.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Première Partie.

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On considère la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'équation cartésienne

$$(t^2-1)\,x - 2t\,y = 2t(t-1).$$

1. *Question préliminaire.* Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$. On considère alors la droite D d'équation cartésienne $a\,x+b\,y+c=0$ ainsi que le point M_0 de coordonnées $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
   (a) Démontrer que les coordonnées du projeté orthogonal H_0 de M_0 sur la droite D sont :
   $$\left(x_0 - a\,\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2},\, y_0 - b\,\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right).$$
   (b) En déduire la distance $\mathrm{d}(M_0,D)$ du point M_0 à la droite D.
2. (a) Déterminer l'ensemble des points du plan équidistants des droites D_{-1}, D_0 et D_1.
   (b) En déduire qu'il existe un unique point, dont on précisera les coordonnées, équidistant de toutes les droites D_t, $t\in\mathbb{R}$.
3. (a) Soit t un réel fixé. Donner un point, un vecteur directeur puis une représentation paramétrique de la droite D_t.
   (b) Démontrer qu'une représentation paramétrique de l'enveloppe Γ de la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est :
   $$\begin{cases} x = \dfrac{2t^2}{1+t^2} \\[2ex] y = \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$
4. On considère maintenant la courbe Γ' de représentation paramétrique
   $$\begin{cases} x = 1+\cos(\theta) \\ y = 1+\sin(\theta) \end{cases},\ \theta\in[0,2\pi].$$
   On note $M(\theta)$ le point de Γ' de paramètre θ, $(\overrightarrow{T(\theta)},\overrightarrow{N(\theta)})$ et $\gamma(\theta)$ la base de Frénet et la courbure de Γ' au point $M(\theta)$. Enfin, s désigne l'abscisse curviligne de Γ' qui s'annule en 0.
   (a) Reconnaître la courbe Γ'. On sera le plus précis possible.
   (b) Démontrer que $\Gamma\subset\Gamma'$. Sont-elles égales ?
   (c) Les deux courbes sont-elles parcourues dans le même sens ?
5. *Des questions de cours... pour préparer la suite*
   (a) Donner les deux définitions (ou caractérisations) de la développée d'une courbe régulière.
   (b) Donner la définition (pas la méthode de calcul) de l'enveloppe d'une famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$.
   (c) Donner les deux formules de Frénet.

6. On considère un réel k et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on note $P_k(\theta)$ le point défini par $\overrightarrow{M(\theta)P_k(\theta)} = (k - s(\theta))\overrightarrow{T}(\theta)$ et Λ_k l'ensemble des points $P_k(\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.
   (a) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{T}(\theta)$ et $\overrightarrow{N}(\theta)$, ainsi que $s(\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$. Quelle est l'origine du repère de Frénet ?
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de Λ_k.
   (c) Déterminer les points non réguliers de Λ_k. Où sont-ils situés ?
   (d) Déterminer la développée de Λ_k éventuellement privée de ses points non réguliers.
7. Dans la suite de cette partie, nous allons vérifier que toute courbe Λ dont la developpée est incluse dans Γ' est une courbe Λ_k.
   Soit $\theta \mapsto P(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ un paramétrage de Λ. On suppose que ce paramétrage est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et que la courbe Λ est birégulière.
   On note $(\overrightarrow{T_P}(\theta), \overrightarrow{N_P}(\theta))$, $s_P(\theta)$ et $\gamma_P(\theta)$ la base de Frénet, une abscisse curviligne et la courbure de Λ au point $P(\theta)$. Enfin, on considère que $M(\theta)$ est le centre de courbure de Λ au point $P(\theta)$.
   (a) Sur la copie, faire une figure illustrant la situation : placer les points $M(\theta)$, $P(\theta)$, les vecteurs $\overrightarrow{T}(\theta)$, $\overrightarrow{N}(\theta)$, $\overrightarrow{T_P}(\theta)$, $\overrightarrow{N_P}(\theta)$ ainsi qu'une allure possible pour les courbes Γ' et Λ au voisinage des points $M(\theta)$ et $P(\theta)$.
   (b) Justifier qu'il existe une fonction λ, dont on admettra qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ telle que : $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, $\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)} = \lambda(\theta)\overrightarrow{T}(\theta)$.
   (c) En déduire que : $$\frac{d\overrightarrow{OP}}{d\theta} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\theta}\overrightarrow{T} + \lambda\frac{d\overrightarrow{T}}{d\theta}$$
   puis que : $$\frac{ds_P}{d\theta}\overrightarrow{T_P} = \frac{ds}{d\theta}\overrightarrow{T} + \frac{d\lambda}{d\theta}\overrightarrow{T} + \lambda\gamma\frac{ds}{d\theta}\overrightarrow{N}.$$
   (d) Justifier que $\dfrac{ds}{d\theta} + \dfrac{d\lambda}{d\theta} = 0$ et en déduire λ.
   (e) Conclure

Deuxième partie.

Soit n un entier naturel plus grand ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Le détail de tous les calculs effectués devra figurer sur la copie.

1. *Un exemple.* Calculer l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. *Un deuxième exemple.* On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $N^2 - 3\,N + 2\,I$ où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que N est inversible et donner l'expression de N^{-1} en fonction de I et N.

Tournez la page S.V.P.

3. *Cas général.* On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, on note $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de la matrice A dans laquelle on a supprimé la $i^{\text{ème}}$ ligne et le $j^{\text{ème}}$ colonne.
   Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A_{1,3} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.
   (a) i. Rappeler la formule permettant de calculer le déterminant de la matrice A en le développant par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ colonne.
   ii. Soit $(j, j') \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$ tel que $j \neq j'$. En considérant la matrice B qui a les mêmes colonnes que A sauf la $j^{\text{ème}}$ colonne de B qui est égale à la $j'^{\text{ème}}$ de A, justifier que :
   $$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j'} \det(A_{i,j}) = 0.$$
   (b) Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $B\,A = C = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
   i. Rappeler l'expression de $c_{i,j}$ en fonction des coefficients des matrices A et B.
   ii. On choisit $\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, $b_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{j,i})$.
   Démontrer que $B\,A = \det(A) I_n$ où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   iii. En déduire, lorsque A est inversible, l'inverse de A en fonction de B.

4. *Application.* Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $A(u,v) = \begin{pmatrix} u\,v - u & u\,v & u^2 - v \\ v - 1 & v & 2u \\ u & u & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer et représenter sur la copie, le domaine D (le plus grand possible) pour que la matrice $A(u,v)$ soit inversible pour tout $(u,v) \in D$.
   On admettra que D est un ouvert.
   (b) Calculer $A(u,v)^{-1}$ pour tout (u,v) de D.

Troisième partie.

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère la surface S paramétrée par $\begin{cases} x = u^2 \\ y = u\,v \\ z = u^2 + v \end{cases}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points non réguliers de S.
   (b) Donner une équation cartésienne du plan tangent à S en tout point régulier de S.

Dans la suite de cette partie, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et a, b, c et d quatre fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. On considère la famille de plans $(P_{u,v})_{(u,v) \in U}$ d'équation cartésienne :
$$a(u,v)\,x + b(u,v)\,y + c(u,v)\,z = d(u,v).$$

L'objectif est de déterminer une surface Σ dont l'ensemble des plans tangents est la famille $(P_{u,v})_{(u,v)\in U}$.
Pour cela, on considère un paramétrage régulier $(u,v)\in U \mapsto M(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ de la surface Σ tel que pour tout $(u,v)\in U$, le plan tangent à Σ au point $M(u,v)$ est le plan $P_{u,v}$.

2. *Cas général.*

   (a) Démontrer que la surface Σ convient si et seulement si :

$$\forall (u,v)\in U,\ \begin{cases} a(u,v)x(u,v)+b(u,v)y(u,v)+c(u,v)z(u,v)=d(u,v) & (\mathrm{Eq}_1)\\ a(u,v)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)+b(u,v)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)+c(u,v)\dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v)=0 & (\mathrm{Eq}_2)\\ a(u,v)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)+b(u,v)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)+c(u,v)\dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v)=0 & (\mathrm{Eq}_3)\end{cases}.$$

   On note (S_1) ce système.

   (b) Démontrer soigneusement que le système (S_1) est équivalent au système (S_2) :

$$\forall (u,v)\in U,\ \begin{cases} a(u,v)x(u,v)+b(u,v)y(u,v)+c(u,v)z(u,v)=d(u,v) & (\mathrm{Eq}_1)\\ \dfrac{\partial a}{\partial u}(u,v)x(u,v)+\dfrac{\partial b}{\partial u}(u,v)y(u,v)+\dfrac{\partial c}{\partial u}(u,v)z(u,v)=\dfrac{\partial d}{\partial u}(u,v) & (\mathrm{Eq}_4)\\ \dfrac{\partial a}{\partial v}(u,v)x(u,v)+\dfrac{\partial b}{\partial v}(u,v)y(u,v)+\dfrac{\partial c}{\partial v}(u,v)z(u,v)=\dfrac{\partial d}{\partial v}(u,v) & (\mathrm{Eq}_5)\end{cases}$$

   On note alors (S_3) le système $\begin{cases} a(u,v)\,X+b(u,v)\,Y+c(u,v)\,Z=d(u,v)\\ \dfrac{\partial a}{\partial u}(u,v)\,X+\dfrac{\partial b}{\partial u}(u,v)\,Y+\dfrac{\partial c}{\partial u}(u,v)\,Z=\dfrac{\partial d}{\partial u}(u,v)\\ \dfrac{\partial a}{\partial v}(u,v)\,X+\dfrac{\partial b}{\partial v}(u,v)\,Y+\dfrac{\partial c}{\partial v}(u,v)\,Z=\dfrac{\partial d}{\partial v}(u,v)\end{cases}$.

3. *Une première application.* Dans cette question, $U=\mathbb{R}^2$ et a, b, c et d sont les fonctions :
   $a:(u,v)\mapsto 2u^2+v$, $\quad b:(u,v)\mapsto 1-(2u^2+v)$,
   $c:(u,v)\mapsto u$ $\quad$ et $\quad d:(u,v)\mapsto uv+u^3$.

   (a) Vérifier que le système (S_3) est inversible pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

   (b) Résoudre (S_3).

   (c) Vérifier que le paramétrage ainsi trouvé est régulier.

4. *Une deuxième application.* Dans cette question, a, b, c et d sont les fonctions :
   $a:(u,v)\mapsto uv-u$, $\quad b:(u,v)\mapsto uv$,
   $c:(u,v)\mapsto u^2-v$ $\quad$ et $\quad d:(u,v)\mapsto v$.
   A l'aide de la partie II., donner un paramétrage de la surface Σ qui convient.

Les courbes Λ_k de la partie 1 sont les développantes de Γ'. Les développantes de cercle sont utilisées pour la réalisation du profil de certains engrenages.

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1093 – D'après documents fournis