I Frenet, courbure

Exercice 1
On considère la courbe paramétrée $t : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos(t)) \end{pmatrix}$ dont le support est la courbe est la droite d'équation $y = \ln(\cos(x))$.

1. Donner l'ensemble de définition ainsi qu'un ensemble d'étude de f.
2. Calculer en chaque point régulier le repère de Frenet.
3. Calculer la courbure en tout point régulier.
4. En déduire un expression de la courbe développée.

Exercice 2
Déterminer les courbes birégulières telles que la courbure soit proportionnelle à l'abscisse curviligne, ie vérifiant $\gamma = as$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et s est une abscisse curviligne.

Indication : on pourra revenir, une fois n'est pas coutume, à la définition de γ et exprimer les solutions f en fonction de s.

II Enveloppes

Exercice 3
Une échelle de longueur ℓ est placée contre un mur. Si l'on fait glisser le pied de l'échelle sur le plan horizontal, elle prend dans l'espace différentes positions dont nous cherchons l'enveloppe.

1. Montrer que les droites matérialisée par l'échelle sont dans un repère adapté d'équation
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ et } a^2 + b^2 = \ell^2.$$
2. Déterminer l'enveloppe.

Exercice 4
On considère le cercle unité centré en O noté $\mathcal{C}$ ainsi qu'une source lumineuse au point S de coordonnées $(-1, 0)$.

1. Soit $t \in]-\pi, \pi[$ et $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_t$ portant la réflexion d'un rayon lumineux arrivant sur le cercle en $A(t)$.
2. Donner une paramétrisation de l'enveloppe des droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in]-\pi,\pi[}$ et tracer.

Exercice 5
On considère deux points P, Q parcourant le cercle unité à des vitesses angulaires respectives de 1 et $\omega \neq \pm 1$. Calculer une représentation paramétrique de l'enveloppe des droites $\mathcal{D}_t = (P(t)Q(t))$. On pourra utiliser les nombres complexes.

Tracer pour $\omega = 3$.