Produits et puissances

Exercice 1
Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (Rappel : ceci signifie $AM = MA$).

Exercice 2
Calcul les puissances kième pour $k \in \mathbb{N}$ de

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. $(\theta \in \mathbb{R})$.
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3
On définit 3 suites de réels par $u_0 = w_0 = 1$ et $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n + w_n \end{aligned}$$

1. *On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Donner un lien matriciel entre X_{n+1} et X_n.*
2. *En déduire en fonction d'une puissance de matrice l'expression de X_n en fonction de n.*
3. *Donner les valeurs de u_n, v_n, w_n en fonction de n.*

Calcul d'inverse

Exercice 4
Déterminer les inverses éventuels des matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5
On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.*
2. *En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Exercice 6
On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Trouver les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A - \lambda I_3$ ne soit pas de rang 3.*
2. *Pour chaque λ ainsi trouvé, trouver tous les $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $AX = \lambda X$. Quel est le lien avec la question précédente ?*
3. *Montrer que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse.*

Exercice 7
On pose $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer le rang de B.*
2. *Calculer B^3.*
3. *En factorisant I_3^3, montrer que $I_3 - B$ et $I_3 + B$ sont inversibles et calculer leurs inverses.*

Exercices plus théoriques

Exercice 8
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices non nulles telles que $AB = 0$.

1. *Montrer que $\mathrm{rg}(A) < n$ et $\mathrm{rg}(B) < n$. On pourra montrer plus tard que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \leqslant n$ dans ce cas*
2. *Montrer que BA n'est pas inversible.*

Exercice 9
Une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique ssi ses coefficients sont positifs et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Montrer qu'un produit de deux matrices stochastiques est encore stochastique.