

# Table des matières

<b>1 Croissances comparées</b>	<b>3</b>
I Sur les fonctions . . . . .	3
II Sur les suites . . . . .	5
<b>2 Séries numériques</b>	<b>9</b>
I Séries convergentes . . . . .	9
II Convergence absolue . . . . .	12
<b>3 Rappels de géométrie</b>	<b>15</b>
I Opérations vectorielles . . . . .	15
II Lieux géométriques . . . . .	17
<b>4 Matrices carrées</b>	<b>21</b>
I Opérations . . . . .	21
II Trace . . . . .	24
III Déterminant . . . . .	25
<b>5 Séries entières</b>	<b>31</b>
I Rayon de convergence . . . . .	31
II Propriétés de la somme, cas réel . . . . .	35
III Développement en série entière . . . . .	38
<b>6 Compléments sur les espaces vectoriels</b>	<b>43</b>
I Bases en dimension quelconques . . . . .	43
II Espaces vectoriels . . . . .	45
III Applications linéaires . . . . .	48
IV Equation(s) d'un sous-espace . . . . .	51
V Endomorphismes particuliers . . . . .	53
<b>7 Intégrations sur un intervalle quelconque</b>	<b>57</b>
I Intégrales convergentes . . . . .	57
II Intégrabilité . . . . .	62
III Outils de calcul . . . . .	64
<b>8 Réduction</b>	<b>67</b>
I Elements propres . . . . .	67
II En dimension finie . . . . .	70
III Diagonalisation . . . . .	73
IV Trigonalisation . . . . .	76
<b>9 Intégrales à paramètres</b>	<b>79</b>
I Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . .	79
II Dérivabilité . . . . .	81
<b>10 Courbes paramétrées</b>	<b>85</b>
I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	85
II Etude de courbes . . . . .	87

<b>11</b>	<b>Espaces euclidiens</b>	<b>91</b>
I	Produit scalaire et norme . . . . .	91
II	Orthogonalité . . . . .	94
III	Espaces orthogonaux . . . . .	96
IV	Automorphismes orthogonaux . . . . .	99
V	Matrices symétriques réelles . . . . .	104
<b>12</b>	<b>Probabilités</b>	<b>107</b>
I	Cadre théorique . . . . .	107
II	Calcul de probabilités . . . . .	111
III	Variables aléatoires . . . . .	112
IV	Fonctions et probabilités . . . . .	115
V	Etude asymptotique . . . . .	121
<b>13</b>	<b>Equations différentielles linéaires</b>	<b>123</b>
I	Equations scalaires . . . . .	123
II	Systèmes différentiels linéaires . . . . .	128
<b>14</b>	<b>Géométrie dans le plan et l'espace</b>	<b>131</b>
I	Isométries . . . . .	131
II	Coniques . . . . .	134
<b>15</b>	<b>Courbes et surfaces</b>	<b>137</b>
I	Paramétrages . . . . .	137
II	Equation cartésienne . . . . .	139
III	Surfaces particulières . . . . .	142
<b>16</b>	<b>Courbes paramétrées</b>	<b>147</b>
I	Etude de courbes : rappels . . . . .	147
II	Etude métrique . . . . .	148
III	Enveloppe, développée . . . . .	152
<b>17</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables</b>	<b>155</b>
I	Continuité . . . . .	155
II	Dérivées partielles . . . . .	158
III	Extremas . . . . .	161

# Chapitre 1

## Croissances comparées

### I Sur les fonctions

#### I.1 Relations de comparaisons

##### I.1.1 Définition

Soit  $I$  un intervalle,  $a \in \bar{I}$  et  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a$  est dans  $I$  ou est une borne de  $I$ , éventuellement infinie)

1. On dit que  $f \underset{a}{\sim} g$  ssi  $\frac{f}{g} \underset{a}{\rightarrow} 1$  et  $\frac{g}{f} \underset{a}{\rightarrow} 1$ . ( $f$  et  $g$  sont équivalentes)

Cette définition n'a du sens que lorsque le calcul de ces limites en  $a$  un.

2. On dit que  $f = o_a(g)$  ou  $f = o_a(g)$  ssi  $\frac{f}{g} \underset{a}{\rightarrow} 0$ . ( $f$  est négligeable devant  $g$ )

En particulier les fonctions  $f$  et  $g$  ne peuvent pas être la fonction nulle

##### Remarque

On ne peut donc pas écrire  $f \underset{a}{\sim} 0$  avec notre définition...

##### Piège

Ce n'est pas parce que  $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$  et  $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$  que  $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$ .

#### I.2 Les outils de calcul

##### I.2.1 Proposition

Avec les notations de la définition précédente, on a  $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g) \iff g = af + o_a(f)$ .

Il s'agit de l'outil le plus pratique pour passer d'un équivalent à un "développement", et réciproquement. On retrouve ici que l'équivalent en  $a$  d'une fonction est le premier terme non nul dans un développement limité en  $a$ .

##### I.2.2 Théorème (Taylor-Young)

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . Alors  $f$  possède un DL à l'ordre  $n$  en  $a$  sous la forme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o_a((x-a)^n)$$

##### Ecriture en 0

Dans le cas des formules usuelles,  $a$  est pris égal à 0 et on obtient

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o_0(x^n)$$

### Les développements usuels

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On a au voisinage de 0 les développements limités usuels suivant (à connaître!)

1. Exponentielle, logarithme, puissances

$$e^x =$$

$$\ln(1+x) =$$

$$\frac{1}{1-x} =$$

$$(1+x)^\alpha =$$

2. Trigonométrie circulaire

$$\sin x =$$

$$\cos x =$$

3. Trigonométrie hyperbolique.

$$\operatorname{sh} x =$$

$$\operatorname{ch} x =$$

#### I.2.3 Proposition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

Si  $f'$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n+1$  en  $a$  qui s'obtient en calculant terme à terme une primitive du développement de  $f'$  et en choisissant comme constante la valeur  $f(a)$ .

### A savoir retrouver

En utilisant la méthode d'intégration terme à terme (sans oublier de rajouter la bonne constante d'intégration, à savoir le terme  $f(0)$  dans Taylor-Young)

1. Le développement à tout ordre de  $\arctan$
2. Les développements à un ordre donné de  $\arcsin$ ,  $\arccos$

### Règles de calcul

Rappel :

- On peut multiplier, diviser ou mettre à une puissance fixe une relation d'équivalence, mais pas sommer ni soustraire terme à terme. On ne peut **pas** composer de chaque côté une relation d'équivalence par une fonction (en particulier, par  $\exp$  ou  $\ln$ ).
- Les développements sont des égalités qui se manipulent donc comme telles, avec les règles de calculs connues sur les  $o_a$  :
  - Dans le cas d'une forme  $o_a(f) + o_a(g)$  on conserve un seul "petit o" : on retire celui qui est négligeable devant l'autre.
  - $f \times o_a(g) = o_a(fg)$ .

- A l'intérieur d'un "petit o" ou d'un "grand o", on peut remplacer une expression par son équivalent.
- On peut effectuer des changements de variables dans les développements usuels en 0, à condition que la nouvelle variable tende bien vers 0.

Conclusion : à par pour une multiplication ou division (ou mise à une puissance fixe) terme à terme, on passera systématiquement par un développement en utilisant la règle  $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g) \iff g = f + o_a(f)$ .

### I.3 Croissances comparées

#### Sur les puissances

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  avec  $\alpha < \beta$ . Les comportements en 0 et  $+\infty$  sont opposés :

$$x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \text{ et } x^\beta = o_0(x^\alpha)$$

#### I.3.1 Théorème (Retour en terminale)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Ces résultats nous permettent de démontrer la version suivante, vue en 1ère année

#### I.3.2 Théorème (Comparaison en $+\infty$ )

Soient  $\alpha, \beta \in ]0, +\infty[$ . Ces nombres sont **strictement positifs**.

1.  $(\ln(x))^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ .
2.  $x^\beta = o_{+\infty}(e^x)$

#### I.3.3 Théorème (Comparaison en 0)

Soient  $\alpha, \beta \in ]0, +\infty[$ .  $|\ln(x)|^\alpha = o_0\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$  ou encore  $x^\beta |\ln(x)|^\alpha \underset{0^+}{\rightarrow} 0$ .

## II Sur les suites

Ici la situation est plus simple, car les seules limites que l'on peut étudier sont quand l'indice (souvent noté  $n$ ) tend vers  $+\infty$

### II.1 Rappels sur les suites géométriques

#### Forme des suites géométriques

Ce sont les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui vérifient une relation de récurrence de la forme  $u_{n+1} = qu_n$  où  $q \in \mathbb{C}$  est fixé (comprendre, ne dépend pas de l'indice  $n$ ).

On a alors, par une récurrence facile,  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = u_0 q^n$ .

#### II.1.1 Lemme

Soit  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Si  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors sa limite est 0.

##### Preuve.

Notons  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = q^n$  et supposons que  $u_n \underset{+\infty}{\rightarrow} l \in \mathbb{C}$ .

Alors  $u_{n+1} \underset{+\infty}{\rightarrow} l$ . Mais pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} = q^{n+1} = qu_n$  et donc par produit de limites finies  $u_{n+1} \underset{+\infty}{\rightarrow} ql$ . Par unicité de la limite,  $l = ql$  et donc  $l(q-1) = 0$ . Comme  $q-1 \neq 0$  on a alors  $l = 0$  ■

**II.1.2 Théorème (Limites des suites géométriques)**

Soit  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

1.  $q^n \xrightarrow{+\infty} 0$  ssi  $|q| < 1$ . C'est le seul cas de suite géométrique convergente.
2. Dans le cas où  $q \in \mathbb{R}$  on peut ajouter que  $q^n \xrightarrow{+\infty} +\infty$  ssi  $q > 1$ .

**II.2 Comparaison des suites****II.2.1 Proposition**

Soient  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite **bornée** et  $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite.

1. Si  $v_n \xrightarrow{+\infty} 0$  alors  $u_n v_n \xrightarrow{+\infty} 0$ .
2. Si  $v_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$  alors  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{+\infty} 0$  ou encore  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ .

**II.2.2 Définition**

Soient  $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  deux suites avec  $(v_n)$  qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que  $(u_n)$  est **dominée** par  $(v_n)$  ssi la suite  $(\left| \frac{u_n}{v_n} \right|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

On note alors  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  (grand o).

**Règles de calcul**

Elles sont les mêmes que pour les petits o. En particulier on pourra écrire

1.  $O_{+\infty}(u_n) = u_n O_{+\infty}(1)$
2.  $O_{+\infty}(u_n) \pm O_{+\infty}(u_n) = O_{+\infty}(u_n)$

avec, comme d'habitude, la précaution élémentaire de se souvenir que chaque  $O$  représente une suite, et que ces suites ne sont pas égales même si elles s'écrivent sous la même forme.

**II.2.3 Proposition (Comparaison à une suite géométrique)**

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs **strictement positive**. On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{+\infty} \ell \in \mathbb{R}^+$  (ou  $\ell = +\infty$ ).

1. Si  $\ell < 1$ , alors pour tout  $q \in ]\ell, 1[$ ,  $u_n = o_{+\infty}(q^n)$ .
2. Si  $\ell > 1$ , alors pour tout  $q \in ]1, \ell[$ ,  $q^n = o_{+\infty}(u_n)$ .

Dans le cas  $\ell = 1$ , on ne peut pas comparer  $(u_n)$  à une suite géométrique.

**Preuve.**

**II.2.4 Corollaire**

Avec les mêmes notations, et toujours pour  $(u_n)$  **strictement positive**

1. Si  $\ell < 1$ , alors  $u_n \xrightarrow{+\infty} 0$ .
2. Si  $\ell > 1$  alors  $u_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$ .

Le résultat de la proposition est plus précis, car il indique que  $(u_n)$  tend "plus vite" que certaines suites géométriques.

**II.2.5 Théorème**

Soient  $\alpha, \beta \in ]0, +\infty[$ . Soit  $q > 1$ .

1.  $\ln(n)^\alpha = o_{+\infty}(n^\beta)$ .

2.  $n^\beta = o_{+\infty}(q^n)$

3.  $q^n = o_{+\infty}(n!)$ .

4.  $n! = o_{+\infty}(n^n)$ .





# Chapitre 2

## Séries numériques

### I Séries convergentes

#### I.1 Vocabulaire

##### I.1.1 Définition

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite.

1. On appelle série de terme général  $u_n$  et on note  $\sum u_n$  ou  $\sum_{n \geq 0} u_n$  la **suite**  $(S_N)$  définie par

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad S_N = \sum_{n=0}^N u_n$$

On dit que  $S_N$  (le nombre) est la  $N$ ième somme partielle de cette série.

Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé  $n_0$  (ce qui revient à poser  $u_n = 0$  pour  $n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket$ ). Dans ce cas la série est notée  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ .

2. On dit que la série  $\sum u_n$  converge ssi la suite des somme partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge. Sa **nature** est d'être convergente ou divergente.

Quand elle existe, on note  $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.

3. Dans le cas d'une série convergente, la suite des restes de la série est la suite définie par  $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - S_N$

#### Complexes

Comme d'habitude, il est suffisant d'étudier les séries des parties réelles et imaginaires  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

#### Modifier une série

On ne change pas la nature convergente ou divergente d'une série en modifiant les  $k$  premières valeurs de  $u_n$  pour un  $k$  fixé. Par contre on modifie la valeur de la somme...

##### I.1.2 Définition-Proposition

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

**SI**  $u_n \not\rightarrow 0$  **ALORS**  $\sum u_n$  diverge.

Dans ce cas on dit que  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

#### Utilisation

Ce résultat n'a qu'une seule utilité : prouver qu'une série diverge. La contraposée est : si  $\sum u_n$  converge alors  $u_n \rightarrow 0$ .

Exemple : montrer que  $\sum (1 - \frac{1}{n})^n$  diverge.

##### I.1.3 Proposition

Considérons 2 séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .

- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent alors  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \sum (\lambda u_n + \mu v_n)$  converge.
- Si  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge alors  $\sum (u_n + v_n)$  diverge.
- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent, on ne peut rien dire sur  $\sum (u_n + v_n)$ .

## I.2 Séries de référence

### Séries convergentes

1. Soit  $q \in \mathbb{C}$ .  $\sum q^n$  converge ssi  $|q| < 1$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .
2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

### Série divergente

La série  $\sum \frac{1}{n}$  est une série divergente appelée série harmonique.

### Séries télescopiques

Exemple : Calculer la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

### Taylor

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre  $n$  à  $\exp$  entre 0 et  $x$  ( $\exp$  est de classe  $n+1$  sur ce segment) donne

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

Ainsi  $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |(x-t)^n e^t| dt \right| \leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |x|^n e^t dt \right| = \frac{|x|^n (e^x - 1)}{n!}$ .

Par croissances comparées,  $\frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et donc  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ .

## I.3 Séries à termes positifs

### I.3.1 Théorème

Soit  $(u_n)_n$  une suite de réels **positifs**.  $\sum u_n$  converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Dans ce cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup \left( \left\{ \sum_{k=0}^N u_n \mid N \in \mathbb{N} \right\} \right)$ .

### Remarque

Ce théorème est fondamental pour la compréhension et l'intuition des séries à termes positifs convergentes. Le terme général ne doit pas "être trop grand".

### I.3.2 Théorème (Comparaison des séries à termes positifs)

Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  des suites de réels positifs.

1. Si  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
3. Si  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
4. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ,  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont la même nature.

**I.3.3 Théorème**

Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  des suites de réels négatifs.

1. Si  $v_n \leq u_n$  à partir d'un certain rang et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
3. Si  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
4. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ,  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont la même nature.

**I.3.4 Exemple**

1.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^n}$  converge.
2.  $\sum \frac{n+3}{n^3-n}$

$n^\alpha u_n$

Soit  $(u_n)_n$  une suite de réels positifs et  $\alpha > 1$

1. Si on a  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  alors  $\sum u_n$  converge.

On a en effet  $u_n = o_{+\infty}(\frac{1}{n^\alpha})$  dans ce cas.

2. Si on a  $n^\alpha u_n \xrightarrow{+\infty} \ell \neq 0$  alors  $\sum u_n$  converge car  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n^\alpha}$  qui est un terme général de signe constant d'une série convergente.

**Attention**

L'hypothèse  $(u_n), (v_n)$  positives est fondamentale. On peut avoir  $u_n \sim v_n$ ,  $\sum v_n$  converge et  $\sum u_n$  diverge si elle n'est pas respectée.

Pour  $n > 1$ , posons  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

1.  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  car  $(-1)^n = o_{+\infty}(\sqrt{n})$  (comparaison d'une suite bornée à une suite de limite infinie).

2. Montrons que  $\sum v_n$  converge. Posons, pour  $N > 1$ ,  $a_N = \sum_{n=2}^{2N} v_n$  et  $b_N = \sum_{n=0}^{2N+1} v_n$ . Alors

$$- b_N - a_N = v_{2N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

$$- a_{N+1} - a_N = -\frac{1}{\sqrt{2N+1}} + \frac{1}{\sqrt{2N+2}} \leq 0 \text{ donc } (a_N) \text{ est décroissante.}$$

$$- b_{N+1} - b_N = \frac{1}{\sqrt{2N+2}} - \frac{1}{\sqrt{2N+3}} \geq 0 \text{ donc } (a_N) \text{ est croissante.}$$

Finalement,  $(a_N)$  et  $(b_N)$  sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune  $l \in \mathbb{R}$ . Ainsi les sommes partielles de  $\sum v_n$  convergent vers  $l$  (leurs suites des termes d'indice pairs et impairs le font).

3. De plus,  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n}) \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o_\infty(\frac{1}{n\sqrt{n}})$ . Ainsi  $u_n$  est la somme de 3 termes généraux de séries convergentes et d'un terme général de série divergente de donc  $\sum u_n$  diverge.

**Divergence**

Si on a  $(u_n)$  et  $(v_n)$  positives :

1. Si  $u_n \leq v_n$  APCR et  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge.
2. Si  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge.

**I.3.5 Théorème (Règle de d'Alembert)**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ . Supposons que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$ .

1. Si  $\ell < 1$  alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $\ell > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge.
3. Si  $\ell = 1$  la série peut être divergente ou convergente.

## Utilisation

1. En général, le calcul de la limite du quotient n'est pas aisé, et en pratique vaut souvent 1...
2. Si l'expression de  $u_n$  fait apparaître des quantité  $n!$  ou  $\alpha^n$  en facteur, la règle de d'Alembert peut être efficace.

### I.3.6 Exemple

Montrer que la série de terme général  $u_n = \frac{n!}{n^n}$  converge.

## I.4 Application à l'étude de suites

### I.4.1 Proposition

Soit  $(u_n)_n$  une suite.  $(u_n - u_0)_{n \in \mathbb{N}}$  à la même limite (ou absence de limite) que  $\sum (u_{n+1} - u_n)$ .

### I.4.2 Exemple

$u_n = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n}\right)$ . Convergence ?

### I.4.3 Exemple

$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ . Montrer que  $(u_n)$  converge en étudiant la convergence de  $\sum (u_n - u_{n-1})$

## II Convergence absolue

### II.1 Convergence d'une série complexe

#### II.1.1 Définition

Soit  $\sum u_n$  une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

**Explication** On regarde en fait la convergence d'une série positive, pour laquelle tous les théorèmes précédent s'appliquent.

#### II.1.2 Théorème

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Si  $\sum u_n$  converge absolument alors  $\sum u_n$  converge et on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

#### Preuve.

— Cas réel.

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n^+ = \max(u_n, 0)$  et  $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ . C'est à dire que  $u_n^+$  est  $u_n$  si  $u_n \geq 0$  et 0 sinon.  $u_n^-$  est  $|u_n|$  si  $u_n \leq 0$  et 0 sinon.

Ainsi ces deux nombres sont positifs et on a  $u_n = u_n^+ - u_n^-$ ,  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ .

On pose pour  $N \in \mathbb{N}$ ,  $S_N = \sum_0^N u_n$  et  $S'_N = \sum_0^N |u_n|$ .

On sait que  $S'_N \xrightarrow{+\infty} l \in \mathbb{R}^+$ . Or  $S'_N = \sum_0^N u_n^+ + \sum_0^N u_n^-$ . Ces deux dernières sommes sont à termes positifs et majorées par  $l$  donc les séries  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  convergent.

Ainsi  $\sum u_n$  converge par différence de série convergente.

— Cas complexe.

Cette fois on pose  $u_n = x_n + iy_n$  et on sait que  $\sum |x_n + iy_n|$  converge.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $|x_n| \leq |u_n|$  et  $|y_n| \leq |u_n|$  donc les séries  $\sum x_n$  et  $\sum y_n$  convergent absolument donc convergent par le point précédent.

Ainsi la combinaison linéaire  $\sum x_n + iy_n$  converge. ■

**Méthode obligatoire**

Pour étudier une série complexe ou une série dont le signe n'est pas constant, on étudiera toujours d'abord la convergence absolue.

**II.1.3 Exemple**

Montrer que  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$  converge.

**Série exponentielle**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  converge.

**Attention**

La réciproque est fautive. Par exemple la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$  converge, mais ne converge pas absolument.

Pour le voir, prenons  $x \neq 1$  et notons que  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$ . En intégrant sur  $[-1, 0]$  on obtient  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \int_{-1}^0 \frac{x^{n+1}}{1-x} dx$ . Or  $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq x^{n+1}$  et par croissance de l'intégrale  $0 \leq \int_{-1}^0 \frac{x^{n+1}}{1-x} dx \leq \frac{1}{n+1}$ .

Finalement,  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$ .

**II.2 Propriétés**

**II.2.1 Proposition**

Soient  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  avec  $\forall n \in \mathbb{N} v_n \geq 0$ .

1. Si  $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} v_n$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
3. Si  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.

**II.2.2 Théorème**

Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries de complexes absolument convergente.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Alors la série  $\sum c_n$  converge absolument et  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

**Preuve.**

— On considère pour commencer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont des suite réelles positives.

Notons, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,  $A_N = \sum_{n=0}^N a_n, B_N = \sum_{n=0}^N b_n, C_N = \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Posons de plus  $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  et  $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

Alors  $C_N = \sum_{k=0}^N \sum_{n=k}^N a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^N \left( a_k \sum_{i=0}^{N-k} b_i \right)$ . Remarquons de plus que  $A_N B_N = \sum_{k=0}^N a_k \sum_{i=0}^N b_i$

Ainsi  $C_N \leq A_N B_N \leq AB$ . La série  $\sum c_n$ , qui est une série de termes positifs, est majorée et donc converge. On note  $C$  sa somme.

Mais on a également

$$C_{2N} = \sum_{k=0}^N \left( a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i \right) + \sum_{k=N+1}^{2N} \left( a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i \right) \geq \sum_{k=0}^N \left( a_k \sum_{i=0}^N b_i \right) = A_N B_N$$

la majoration étant valable car on retranche des termes positifs.

Finalement,  $C_N \leq A_N B_N \leq C_{2N}$  et par passage à la limite ( $N \rightarrow +\infty$ , les limites existent) on obtient bien  $C = AB$ .

— Revenons maintenant au cas général.

On note en plus,  $c'_n = \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}|$ ,  $A'_N = \sum_{n=0}^N |a_n|$ ,  $B'_N = \sum_{n=0}^N |b_n|$ ,  $C'_N = \sum_{n=0}^N |c_n|$  et  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  les sommes de ces 3 séries ( $A'$ ,  $B'$  existent par hypothèse,  $C'$  d'après le cas réel positif).

On a, d'après le point précédent,  $A'_N B'_N - C'_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ .

De plus,  $|C_N| \leq C'_N \leq C'$  par inégalité triangulaire et donc  $\sum c_n$  converge absolument (série à termes positifs majorée) et on note encore  $C$  sa somme (l'existence de  $C$  n'est pas nécessaire à la suite du raisonnement).

D'après les calculs du premier point,  $A_N B_N - C_N$  est une somme  $\sum_{(i,j) \in E} a_i b_j$  où  $E \subset \llbracket 0, N \rrbracket^2$  (qui représente les termes restant après simplification, ie. ceux qui n'apparaissent pas dans  $C_N$ ), on a  $|A_N B_N - C_N| \leq \sum_{(i,j) \in E} |a_i b_j| = A'_N B'_N - C'_N$ . Par encadrement,  $A_N B_N - C_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  donc  $C = AB$ . ■

### II.2.3 Exemple

Posons pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Montrer que  $\forall a, b \in \mathbb{C} f(a+b) = f(a)f(b)$ .

## II.3 Approximations et restes

### Valeur approchée de la limite

Supposons que  $\sum u_n$  converge vers  $S$ .

Alors pour  $N \in \mathbb{N}$ ,  $|S - S_N| = |R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \right|$ . Si on sait majorer les restes d'une série convergente, alors on connaît un minorant de la qualité de l'approximation ainsi que de la vitesse de convergence de la série.

### Riemann

Soit  $\alpha > 1$  un réel.

Montrons que  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ .

### Séries géométriques

On connaît une expression explicite du reste.

Si on a maintenant une suite vérifiant  $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$  pour un  $k \in ]0, 1[$ , montrons que  $|R_N| \leq \frac{|u_{N+1}|}{1-k}$

# Chapitre 3

## Rappels de géométrie

### I Opérations vectorielles

On se place dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $n = 2$  ou  $3$ .

#### I.1 Produit scalaire

##### Propriétés

Soient  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ , mais plus s'il le faut, la définition ne change pas).

Le produit scalaire de  $X$  et  $Y$  est  $\langle X, Y \rangle = (X|Y) = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . avec des notations évidentes pour les coordonnées dans la base canonique.

1. symétrie :  $(X|Y) = (Y|X)$ . C'est évident sur la formule à l'aide d'une somme. On peut également remarquer que  ${}^tXY$  est un nombre et donc  ${}^t({}^tXY) = {}^tYX$  est le même nombre.
2. Bilinearité : Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, X_1, X_2, Y \in \mathbb{R}^n$

$$(\alpha X_1 + \beta X_2|Y) = \alpha(X_1|Y) + \beta(X_2|Y) \text{ linéarité à gauche}$$

$$(Y|\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha(Y|X_1) + \beta(Y|X_2) \text{ linéarité à droite}$$

3. positivité :  $(X|X) \geq 0$ .
4. le produit scalaire est défini :  $(X|X) = 0 \iff X = 0$ .
5. On a  $\|X\|^2 = (X|X)$ .

##### Exercice 1

Soient  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2(X|Y) + \|Y\|^2$ . Calculer  $\|X - Y\|^2$  et  $(X - Y|X + Y)$ .

##### Exercice 2

Exprimer  $(X|Y)$  en fonction de normes.

##### Orthogonalité

Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

##### Distance

La distance entre deux éléments de  $\mathbb{R}^n$  est la norme de leur différence :  $d(X, Y) = \|X - Y\| = \|Y - X\|$

##### Exercice 3

À quelle condition un parallélogramme est-il un losange ? un rectangle ? Le prouver !

#### I.2 Produit vectoriel

On se place obligatoirement dans  $\mathbb{R}^3$  cette fois.

**Propriétés**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

1. Si  $u, v \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \wedge v$  est orthogonal à  $u$  et  $v$ .
2.  $u \wedge v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff u$  et  $v$  sont colinéaires.
3. Si  $u, v$  sont non colinéaires,  $(u, v, u \wedge v)$  est une base directe de l'espace.
4. Le produit vectoriel est bilinéaire.
5. le produit vectoriel est anti-symétrique, ie  $u \wedge v = -v \wedge u$ .
6.  $\|u \wedge v\|$  est l'aire du parallélogramme construit sur  $u$  et  $v$  (qui peut être plat, et on retrouve la CNS de colinéarité).

**Construction de base orthonormée directe**

Si on a  $u, v \in \mathbb{R}^3$  tels que  $u \neq 0, v \neq 0$  et  $u \perp v$ , alors on peut poser  $u' = \frac{1}{\|u\|}u$  et  $v' = \frac{1}{\|v\|}v$ . Alors, si  $w' = u' \wedge v'$ , la base  $(u', v', w')$  est orthonormée directe.

**Exercice 4**

Construire une base orthonormée directe dont les deux premiers vecteurs forment une base du plan  $P : x - z = 0$ .

**I.3 Déterminant****Définitions**

1. Dans le cas du plan, et pour  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Si  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  (coordonnées dans la base canonique) alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

2. Dans le cas de l'espace, pour  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace. On appelle *produit mixte* ou déterminant de ces trois vecteurs le réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle (\vec{u} \wedge \vec{v}), \vec{w} \rangle$$

En exprimant les coordonnées dans la base canonique,  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$  on a

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

**Propriétés**

1.  $n$  vecteurs forment une base de  $\mathbb{R}^n$  ssi leur déterminant dans la base canonique est non nul.
2. On déduit du premier point qu'une matrice carrée de taille 2 ou 3 est inversible ssi son déterminant est non nul.
3. le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne.

Par exemple, pour  $u, v, w \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  on a (dans la base canonique)

$$\det(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \det(u, w) + \beta \det(v, w)$$

4. une base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif.



### Interprétation géométrique

1. On note  $\mathcal{B}_c$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soient  $u, v \in \mathbb{R}^2$ .  $\det_{\mathcal{B}_c}(u, v)$  est l'aire orientée du parallélogramme construit sur  $u, v$ .
2. Dans  $\mathbb{R}^3$ , le déterminant est le volume orienté du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

### Exercice 5

1. Soient  $A, B, C$  3 points non alignés de  $\mathbb{R}^2$ . Exprimer à l'aide d'un déterminant l'aire du triangle  $ABC$ .
2. Rappelons que le volume d'un tétraèdre est  $V = \frac{1}{3}B \times h$  où  $B$  est l'aire d'une base et  $h$  la hauteur correspondante. Exprimer à l'aide d'un déterminant le volume du tétraèdre  $ABCD$ .  
Rappel : le volume d'un parallélépipède est donné par  $B \times h$  où  $B$  est l'aire de la base.

## II Lieux géométriques

### II.1 Droites

#### Généralités

Les droites (affines) de  $\mathbb{R}^n$  sont les ensembles de la forme  $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(u)$  où  $A$  est un point et  $u$  un vecteur directeur non nul.  $D = \text{Vect}(u)$  est la direction de  $\mathcal{D}$ .

Cela revient à donner une représentation paramétrique de  $\mathcal{D}$ . Par exemple dans le plan,  $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$  ssi  $\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = x_A + tx_u \\ y = y_A + ty_u \end{cases}$  avec des notations évidentes pour les coordonnées de  $A$  et  $u$ . Dans l'espace, on ajoute juste une troisième coordonnée.

#### Colinéarité

Avec les notations précédente, un point  $M \in \mathbb{R}^n$  est un point de  $\mathcal{D}$  ssi  $\overrightarrow{AM}$  et  $u$  sont colinéaires (penser au déterminant dans  $\mathbb{R}^2$ ).

#### Cas de $\mathbb{R}^2$

Toute droite  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$  possède une équation de la forme  $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$  et  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est un vecteur non nul **normal** à  $\mathcal{D}$ , ie orthogonal à tout vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ , ou encore orthogonal à tout vecteur de la direction de  $\mathcal{D}$ .

Ainsi  $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  est directeur de  $\mathcal{D}$  (non nul!).

#### Exercice 6

1. Soit  $\mathcal{D} : 2x - y + 1 = 0$ . Donner deux points, un vecteur directeur et un vecteur normal de  $\mathcal{D}$ .
2. Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Donner une équation, un vecteur directeur et un vecteur normal de  $\mathcal{D} = (AB)$ .
3. Donner une équation, un deuxième point et un vecteur normal de  $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

#### Savoir faire

Déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles.

#### Exercice 7

Soit  $\mathcal{D} : 3x + 7y - 2 = 0$ . Déterminer la distance de  $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  à  $\mathcal{D}$ . Astuce : si  $A, B \in \mathcal{D}$ , on pourra calculer l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme.

#### Cas de $\mathbb{R}^3$

Les droites de l'espace ne possèdent PAS d'équation cartésienne. A la place, on peut les décrire comme intersection de deux plans.

## II.2 Plan de $\mathbb{R}^3$

### Définition

Un plan de  $\mathbb{R}^3$  est un ensemble de la forme  $\mathcal{P} = A + \text{Vect}(u, v)$  où  $A$  est un point et  $(u, v)$  est libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires). Sa direction est le sous-espace vectoriel de dimension 2  $\text{Vect}(u, v)$ .

Ainsi un point  $M$  est un point de  $\mathcal{P}$  ssi  $(\overrightarrow{AM}, u, v)$  est liée (encore une fois, on pensera au déterminant).

### Equation

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $\mathcal{P}$  possède une équation de la forme  $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$  où  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est un vecteur non nul, **normal** à  $\mathcal{P}$ .

### Exercice 8

On pose  $\mathcal{P} : x - 2y + z - 3 = 0$ . Donner une base et un point de  $\mathcal{P}$ .

### Exercice 9

Donner une équation de  $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  ainsi que 2 autres points de ce plan, de telle manière que la donnée des nos trois points détermine  $\mathcal{P}$ .

### Exercice 10

On pose  $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Trouver deux plans dont l'intersection est  $\mathcal{D}$ . On pourra les donner par des équations.

## II.3 Cercles

### Définition

Soit  $\Omega$  un point d'un plan ( $\mathbb{R}^2$  ou un plan de  $\mathbb{R}^3$ ). Le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R \in ]0, +\infty[$  est l'ensemble des points de ce plans à distance  $R$  de  $\Omega$ .

### Equation

Dans  $\mathbb{R}^2$ , tout cercle possède une équation de la forme  $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$  où  $\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$  est le centre et  $R$  le rayon.

### Tangentes

La tangente en un point  $M_0$  du cercle  $\mathcal{C}$  est la droite passant par  $M_0$  et **orthogonale** à  $\overrightarrow{\Omega M_0}$ .

### Exercice 11

Pour une droite  $\mathcal{D}$  donnée, décrire le lieu des centres des cercles tangents à  $\mathcal{D}$  en un point  $M_0 \in \mathcal{D}$  fixé.

### Exercice 12 (Théorème important)

Soient  $A, B$  deux points fixés et distincts du plan.

Décrire l'ensemble  $E = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid (\overrightarrow{AM} | \overrightarrow{BM}) = 0\}$ .

### Exercice 13

Décrire en fonction des rayons et des centres le nombre de points d'intersection de deux cercles du plan.

### Exercice 14 (Adaptation à l'espace)

Dans un repère orthonormal direct on donne les points  $A : (1, 2, 3)$ ,  $B : (2, 3, 1)$ ,  $C : (3, 1, 2)$ ,  $D : (1, 0, -1)$ .

1. Chercher le centre et le rayon de la sphère circonscrite à  $ABCD$ .
2. Chercher les équations cartésiennes des plans  $(ABC)$ ,  $(ABD)$ ,  $(ACD)$ ,  $(BCD)$ .

**Equation de sphère**

La sphère de centre  $\Omega = \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \\ z_\Omega \end{pmatrix}$  et de rayon  $R \geq 0$  est l'ensemble des points (de l'espace) à distance  $R$  de  $\Omega$  et est d'équation

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

**Exercice 15**

Décrire l'intersection de deux sphères en fonction de leurs rayons et de la distance entre leurs centres.



# Chapitre 4

## Matrices carrées

Dans ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $n$  un entier naturel non nul.

### I Opérations

#### I.1 Produit, puissances

##### Notation

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée on note  $A^0 = I_n$  et  $A^p = A \times \cdots \times A$  ( $p$  fois).

##### I.1.1 Exemple

Factoriser  $A^2 + A - 2I_n$

##### I.1.2 Exemple

On suppose qu'une matrice carrée  $A$  vérifie  $A^2 + A - 2I_n = 0$ . Calculer le reste de la division euclidienne de  $X^k$  par  $X^2 + X - 2$  pour  $k \in \mathbb{N}$  et en déduire une expression de  $A^k$ .

##### I.1.3 Proposition

Soit  $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $AB = BA$  alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} A^k B^{n-k}$$

##### I.1.4 Exemple

Calculer toutes les puissances de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$

##### I.1.5 Proposition

Soit  $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $AB = BA$  alors

$$A^n - B^n = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k} = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$$

#### Exercice 16

On suppose que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente d'ordre  $r > 0$ , c'est à dire que  $A^r = 0$ . Montrer que  $I_n - A$  est inversible et calculer son inverse.

exo : donner un exemple d'une telle matrice.

### Rappels sur les matrices particulières

Un produit ou une somme de matrices triangulaire (ou diagonale) reste triangulaire.

Si  $D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$  est une matrice diagonale, alors  $D^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  (avec la convention  $0^0 = 1$ ).

### Produit et transposition

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ . En particulier,  $\forall k \in \mathbb{N} \quad {}^t(A^k) = ({}^tA)^k$ .

### Lignes et colonnes

Soit  $L$  une matrice ligne de taille  $n$  et  $C$  une matrice colonne de taille  $n$ . Donner les tailles et le rang des matrices  $CL$  et  $LC$ .

## I.2 Inversibilité

### I.2.1 Définition

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite inversible ssi il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$AB = I_n = BA.$$

Dans ce cas on note  $B = A^{-1}$  et pas  $\frac{1}{A}$ . En particulier on ne notera pas de quotients de matrices, mais des produits par l'inverse.

On note  $GL_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  inversibles. Ce n'est pas un espace vectoriel!

### I.2.2 Proposition

On dit que  $GL_n(\mathbb{K})$  est un groupe pour  $\times$  :

1.  $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$
2. Le produit de deux matrices  $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$  inversibles est encore inversible et on a  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
3. Si  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  alors  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

### Lien avec la transposition

Si  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  alors  ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$  et  ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$  donc la relation I.1 est valable pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Inverse particulière

Une matrice triangulaire  $A$  est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.  $A^{-1}$  est triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de  $A$ .

En particulier, la relation I.1 est valable pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  dès que les  $a_n$  sont tous non nuls.

### I.2.3 Théorème

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Notons  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$  et  $L_1, \dots, L_n$  ses lignes.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff A \underset{L}{\sim} I_n \text{ (équivalente par ligne)} \iff A \underset{C}{\sim} I_n \\ &\iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base de } M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ &\iff (L_1, \dots, L_n) \text{ est une base de } M_{1,n}(\mathbb{K}) \\ &\iff \text{rg}(A) = n \iff \ker(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\ &\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n \exists! X \in \mathbb{K}^n \quad AX = Y \\ &\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = I_n \end{aligned}$$

**Cas  $n = 2$  ou  $3$**

On a en plus  $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$ .

**I.3 Matrices et bases**

**I.3.1 Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie égale à  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$  une famille de vecteurs. Pour  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$  on note  $a_{ij}$  la  $i$ ème coordonnée de  $u_j$ .

Alors la matrice  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est appelé matrice de la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  dans la base  $\mathcal{B}$  et est noté  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ .

C'est la matrice des colonnes des coordonnées des  $x_j$ .

**I.3.2 Exemple**

Rappel :  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2[X]$ . Donner la matrice de  $(P_1, P_2, P_3) = (X - 1, 2X^2 + 3, X^2 + 2X + 4)$  dans  $\mathcal{B}$ . Est-elle inversible ? Quelle est la signification pour cette famille de polynômes ?

**I.3.3 Proposition**

Le rang d'une famille est le même que le rang de sa matrice dans une base. En particulier, ce rang ne dépend pas de la base choisie.

**I.3.4 Définition**

1. Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie de dimension respectives  $p$  et  $n$ . On note  $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $F$ . Soit également  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . La matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$  (noté  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ ) est la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

C'est la matrice des coordonnées des  $f(e_j)$  dans  $u_1, \dots, u_n$ , écrites en colonnes.

2. Si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .

**I.3.5 Exemple**

On considère l'application linéaire  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \end{cases}$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et calculer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

**Produit matriciel et évaluation**

Avec les notations de la définition. Soient en plus  $x \in E$  et  $y \in F$ . On note  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$  et  $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y)$ ,  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ .

$$y = f(x) \iff Y = AX$$

Multiplier par  $A$  revient à calculer l'image par  $f$  (à condition que les bases soient les bonnes).

**I.3.6 Exemple**

Avec l'exemple précédent, calculer l'image de  $w = u + 2v$  dans la base  $\mathcal{B}$  puis dans la base canonique.

**I.3.7 Théorème**

Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions respectives  $q, p, n$  et de bases  $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ . Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

On pose de plus  $M_f = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $M_g = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Alors  $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = M_g M_f \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Rappel : si  $C = AB$ ,  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$ .

**I.3.8 Exemple**

Toujours avec le même exemple, calculer la matrice dans  $\mathcal{B}$  de  $f^2 = f \circ f$  puis de  $f^k$ .

**I.3.9 Théorème**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire entre ensemble de dimensions finies de bases respectives  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ .  $f$  est un isomorphisme ssi  $M_f = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$  est inversible.

Dans ce cas  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f^{-1}) = M_f^{-1}$ .

**I.3.10 Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . On appelle matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  de  $\mathcal{B}'$  dans  $\mathcal{B}$ .

On exprime la **nouvelle base  $\mathcal{B}'$**  en fonction de l'**ancienne base**

**I.3.11 Théorème**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . On note  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On pose  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ . Alors  $M' = P^{-1}MP$

**I.3.12 Exemple**

Donner la matrice dans la base canonique de  $f^k$ , toujours pour la même application  $f$ .

**I.3.13 Définition**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est semblable à  $B$  ssi il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = P^{-1}BP$ .

$A$  et  $B$  représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

**Remarque**

1. Deux matrices semblables ont le même rang.
2. La seule matrice semblable à  $I_n$  est elle-même.

**II Trace****II.1 Trace d'une matrice****II.1.1 Définition**

Soit  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle la trace de  $A$  et on note  $\text{tr}(A)$  le **nombre**  $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$  qui est la somme de ses coefficients diagonaux.

**II.1.2 Exemple**

Pour  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , calculer  $\text{tr}({}^tAA)$ .

**II.1.3 Proposition**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1.  $\text{tr}({}^tA) = \text{tr}(A)$
2.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}(A) + \beta \text{tr}(B)$ .

Ainsi la trace est une forme linéaire :  $\text{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

**Exercice 17**

Montrer que le noyau de la trace est un hyperplan et en donner une base.

**Effet du produit**

Montrer que dans le cas général on a pas  $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(A)^2$ .



## II.2 Trace d'un endomorphisme

### II.2.1 Théorème

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

#### Preuve.

Notons  $C = AB$  et  $D = BA$  avec  $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$  et  $C = (c_{i,j}), D = (d_{i,j})$ .

Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$  on a  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$  et donc  $\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k}$  en échangeant les sommes.

On renomme maintenant les indices :  $\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i} = \sum_{i=1}^n d_{i,i} = \operatorname{tr}(D)$  ■

### Exercice 18

Montrer que  $\operatorname{tr}({}^tAB) = \operatorname{tr}(A{}^tB)$  avec les notations du théorème.

En déduire la valeur de cette trace dans le cas où  $A$  est symétrique et  $B$  anti-symétrique.

### Matrices semblables

Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables alors  $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$ .

En effet, si on a  $A = P^{-1}BP$  pour une matrice inversible  $P$  (voir  $P$  comme une matrice de passage), alors  $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}((P^{-1}B)P) = \operatorname{tr}(P(P^{-1}B)) = \operatorname{tr}(B)$ .

### Invariants

On peut maintenant dire que deux matrices semblables ont :

1. le même rang
2. la même trace

### II.2.2 Définition-Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Le scalaire  $\operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  choisie pour calculer la matrice. On le note  $\operatorname{tr}(f)$ .

### II.2.3 Exemple

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto XP' \end{cases}$ . Calculer  $\operatorname{tr}(f)$ .

### Exercice 19

Soit  $p$  un projecteur dans  $E$  de dimension finie. Montrer que  $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$ .

### Linéarité

Pour  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  on a  $\operatorname{tr}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{tr}(f) + \beta \operatorname{tr}(g)$ .

## III Déterminant

### III.1 Déterminant de taille $n$

#### III.1.1 Définition-Proposition

Il existe une unique application  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  telle que

1.  $\det(I_n) = 1$
2.  $\det$  est linéaire par rapport à chaque colonne.
3.  $\det$  est anti-symétrique ie change de signe si on échange deux colonne de sa variable.

### Conséquences de la définition

Notons  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Si on a  $C_i = 0$  pour un certain  $i$  alors  $\det(A) = 0$  par linéarité par rapport à la  $i$ ème colonne.
- Si on a  $C_i = C_j$  pour  $i \neq j$  alors  $\det(A) = -\det(A)$  par échange de ces deux colonnes donc  $\det(A) = 0$ .

#### III.1.2 Exemple

Calculer  $\begin{vmatrix} 7 & -42 \\ -3 & 18 \end{vmatrix}$

### Interprétation géométrique

En dimension 2 : aire (algébrique) d'un parallélogramme + dessin. En dimension 3 : volume d'un parallélépipède.

### Notation

Comme en dimension 2 et 3, on note un déterminant sous forme d'un tableau de nombre entouré de barres verticales.

#### III.1.3 Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On fait subir une opération élémentaire sur les colonnes de  $A$  et on note  $A'$  la matrice obtenue.

1. Si l'opération est  $C_i \leftrightarrow C_j$  avec  $i \neq j$  alors  $\det(A') = -\det(A)$ .
2. Si l'opération est  $C_i \leftarrow \lambda C_i$  avec  $\lambda \neq 0$  alors  $\det(A') = \lambda \det(A)$
3. Si l'opération est  $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $i \neq j$  alors  $\det(A') = \det(A)$ .

#### III.1.4 Corollaire

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  alors  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

### Calcul en pratique

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On réduit  $A$  par colonnes pour calculer son déterminant. Attention aux opérations d'échange ou de multiplication par un scalaire.

#### III.1.5 Exemple

Calculer  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

#### III.1.6 Théorème

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $A$  est inversible ssi  $\det(A) \neq 0$ .

#### Preuve.

En reprenant les notations de III.1.3, on remarque que  $\det(A) = 0 \iff \det(A') = 0$  Réduisons la matrice par colonne et notons  $R$  la matrice réduite. On a  $\det(R) = 0 \iff \det(A) = 0$ .

$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff R = I_n$ . Ainsi si  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  alors  $\det(A) \neq 0$  car  $\det(I_n) = 1 \neq 0$ .

Supposons au contraire que  $A \notin GL_n(\mathbb{K})$ . Alors  $R$  possède au moins une colonne nulle (autant que la dimension du noyau de  $A$  d'ailleurs) et  $\det(R) = 0$  donc  $\det(A) = 0$ . ■

#### III.1.7 Exemple

Trouver à quelle condition sur  $a \in \mathbb{C}$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ -1 & a^2 & a \end{pmatrix}$  est inversible

**Remarque**

Le déterminant est toujours une expression polynomiale des coordonnées (s'exprime comme produits et sommes des coordonnées de la matrice)

**III.1.8 Exemple**  
Calculer le déterminant de  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

**III.1.9 Proposition**

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

**Preuve.**

Remarquer que le déterminant est nul ssi un des coefficient diagonaux est nul ssi la matrice triangulaire n'est pas inversible.

Dans ce cas d'une matrice inversible, le calcul est direct, sur le même modèle que l'exemple. ■

**Méthode**

Une première méthode de calcul du déterminant :

1. Echelonner la matrice par opérations élémentaires (attention à la valeur du déterminant qui change parfois)
2. Calculer le produit des coefficients diagonaux.

**III.2 Propriétés calculatoires****III.2.1 Théorème**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\det(A) = \det({}^tA)$ .

**Preuve.**

Admis! Elle est plutôt difficile. ■

**Conséquences**

On peut maintenant effectuer des opérations élémentaires sur les lignes au même titre que sur les colonnes, avec les mêmes effets.

**III.2.2 Théorème**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $n \geq 2$ ,  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ . Pour  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  on note  $A_{i,j}$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$  déduite de  $A$  en supprimant la  $i$ ème ligne et la  $j$ ème colonne.

1.  $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$  (développement par rapport à la  $j$ ème colonne)
2.  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$  (développement par rapport à la  $i$ ème ligne)

**Preuve.**

Admis. Une idée de preuve (un peu pénible, mais pas si difficile) : on reprend les notations de III.1.3 et on prouve le premier point pour  $j$  fixé. On prouve alors que l'application de la formule à  $A'$  est l'opposé de celle à  $A$  pour un échange de colonne et donne le même résultat pour une combinaison de colonnes. Ainsi la formule est vraie pour  $A'$  ssi elle l'est pour  $A$ . Il suffit ensuite de réduire  $A$  et de remarquer que la formule est triviale pour l'identité. ■

**Tableau des signes**

On résume souvent les signes qui apparaissent dans cette formule par

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

**III.2.3 Exemple**

Calculer le déterminant  $d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$  On effectue  $C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1$  et on développe par rapport à la 3<sup>ème</sup>

colonne :  $d = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (3 \times 1 - 2 \times (-5)) = 13.$

**Méthode**

Une deuxième méthode de calcul du déterminant : Appliquer bêtement une des formules précédente.

Une bonne idée sera de faire apparaître des 0 sur une ligne ou colonne pour réduire le nombre de termes dans le développement.

**III.2.4 Exemple**

Calculer le déterminant  $d_n = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & -3 & 2 \\ 0 & & \dots & & 1 & -3 \end{vmatrix}_{[n]}$

**III.2.5 Corollaire**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$ .

**Preuve.**

Immédiat par récurrence et utilisant les propriétés calculatoires de la conjugaison (somme, produit). ■

**III.2.6 Théorème**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

**Preuve.**

Si  $A$  n'est pas inversible,  $AB$  non plus et donc le résultat est vrai.

$$\text{Sinon, considérons } f \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{K} \\ (C_1, \dots, C_n) & \mapsto \frac{\det(AC_1, \dots, AC_n)}{\det(A)} \end{cases}$$

Alors  $f(I_n) = 1$ , si on échange deux colonnes de  $M$ ,  $f$  change de signe. De plus,  $f$  est linéaire par rapport à chaque colonne par composition et produit par une constante ( $X \mapsto AX \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  et le déterminant est linéaire par rapport à cette colonne).

Ainsi  $f = \det$ . TADAM! ■

**M-Attention**

On a surtout pas  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .

**III.2.7 Corollaire**

Si  $A$  est inversible alors  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

**Preuve.**

On a directement  $\det(A) \det(A^{-1}) = 1$ ... ■

### III.3 Déterminant et espace vectoriel

#### III.3.1 Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  et  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$  une famille de  $n$  vecteurs. Soit  $\mathcal{B}$  une base. On appelle déterminant de  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$  le nombre  $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n))$ .

#### Lien avec la géométrie

Ce que l'on appelait déterminant d'une famille dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  est en fait le déterminant dans la base canonique. Rappel : dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  ssi  $\vec{u}, \vec{v}$  sont colinéaires.

#### III.3.2 Proposition

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  une famille de  $n$  vecteurs.

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \text{ ssi } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$$

#### III.3.3 Exercice

Que vaut  $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}$  dans ce cas ?

#### III.3.4 Exemple

Montrer que  $((\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

#### III.3.5 Théorème

Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

#### Preuve.

Posons  $A = P^{-1}BP$  pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ .

$$\text{On a alors } \det(A) = \det(P^{-1}) \det(B) \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \det(P) \det(B) = \det(B). \quad \blacksquare$$

#### Invariants

Nous voilà avec 3 invariant de changement de base pour les endomorphismes : le rang, la trace et le déterminant.

#### III.3.6 Définition

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  avec  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ . Toutes les matrices de  $f$  (ie dans n'importe quelle base) ont le même déterminant, on le note  $\det(f)$  et on l'appelle déterminant de  $f$ .

#### III.3.7 Exemple

On considère l'application  $T : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^t M \end{cases}$ . Calculer son déterminant.

#### III.3.8 Exemple

On considère des espaces supplémentaires  $E = F \oplus G$  avec  $F, G \neq \{0_E\}$  (ce qui impose  $\dim(E) > 1$ ). Soit  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  dans la direction  $G$ . Calculer  $\det(s)$ . De même avec  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

#### III.3.9 Proposition

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  avec  $E$  de dimension  $n$ .

1.  $\det(\text{Id}_E) = 1$
2. Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ .
3.  $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$
4.  $f$  est bijective (on dit aussi inversible) ssi  $\det(f) \neq 0$  et alors  $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$ .

#### Puissances

ON a directement  $\det(f^n) = \det(f)^n$  qui est valable par récurrence pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et même  $n \in \mathbb{Z}$  si  $f$  est bijective.



# Chapitre 5

## Séries entières

### I Rayon de convergence

#### I.1 Série entière

##### I.1.1 Définition

- Une série entière de variable  $z \in \mathbb{K}$  est une série de la forme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  où  $a_n \in \mathbb{C}$ .
- Les termes de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont appelés les coefficients de la série entière.
- Pour chaque  $z \in \mathbb{K}$  on étudie la convergence de la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ . L'ensemble des  $z \in \mathbb{K}$  pour lesquels la série entière converge est appelé domaine de convergence.
- La somme de cette série entière est la **fonction**  $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  définie sur le domaine de convergence.

##### Remarque

Comme pour les séries numériques, on peut considérer des séries entières dont le premier terme n'est pas d'indice 0. Pour revenir dans le cadre du cours, on considère que les premiers termes de  $(a_n)$  sont nuls. La convergence des séries numériques ne dépend pas de la valeurs des premiers termes (mais la somme oui!).

**Explication** On reconnaît une série entière au fait qu'on voit apparaître la variable  $z$  à la puissance  $n$  exactement (l'indice de somme) et que le facteur de  $z^n$  est une quantité qui ne dépend que de  $n$  et pas de  $z$  : son coefficient. Penser aux polynômes.

##### Rappel

Nous allons beaucoup parler de divergence grossière en ce début de chapitre. Rappelons que si  $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  est une suite de complexes (ou de réels d'ailleurs, c'est un cas particulier),  $b_n \xrightarrow{+\infty} 0 \iff |b_n| \xrightarrow{+\infty} 0$ .

##### I.1.2 Exemple

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a vu que la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$  converge ssi  $|z| < 1$ . On peut donc considérer la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$  qui est bien définie sur  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . C'est le disque unité ouvert.

$$\text{On a alors } \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

##### I.1.3 Définition

On considère deux séries entières  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ .

1. La série somme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  est la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ .
2. Le produit de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  par le scalaire  $\lambda \in \mathbb{C}$  est la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda a_n z^n$ .
3. La série produit est la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$  où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

**Remarque**

Si les séries numériques  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  convergent pour une valeur de  $z \in \mathbb{C}$ , alors la série somme et la série produit par un scalaire convergent aussi pour ce  $z$ .

Pour assurer la convergence de la série produit, il faut supposer la convergence absolue des séries numériques.

**I.1.4 Exemple**

Trouver  $D_1$  le domaine de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n z^n$  et  $D_2$  celui de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n z^n$ . Où est définie la série somme ?

Soit  $z \in \mathbb{C}$

1.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (2z)^n$  converge ssi  $|2z| < 1$  donc  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{2}\}$ .
2. Pour  $D_2$ , remarquons d'abord que si  $|z| \geq 1$  alors  $n z^n \not\rightarrow 0$  et donc la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n z^n$  diverge grossièrement. Supposons donc  $|z| < 1$ . Alors  $n^2 \times n z^n = n^3 z^n \xrightarrow{+\infty} 0$  (elle tend vers 0 en module) et donc  $|n z^n| = o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})$ . Comme  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum n z^n$  converge absolument donc converge. Ainsi  $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ .

Comme la somme d'une série (numérique) convergente et d'une série divergente est une série divergente, la série entière somme converge sur  $D_1$ .

**I.2 Convergence d'une série entière**

**I.2.1 Définition**

Soit  $R \in \mathbb{R}^+$ . On appelle disque ouvert de centre  $O$  et de rayon  $R$  l'ensemble  $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ .

**Remarque**

$$D_0 = \emptyset.$$

**I.2.2 Théorème (Lemme d'Abel)**

Soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Supposons qu'il existe  $r > 0$  tel que  $(|a_n| r^n)$  est une suite bornée. Alors pour tout  $z \in D_r$  (ie  $|z| < r$ )

$$|a_n z^n| = O_{+\infty} \left( \left( \frac{|z|}{r} \right)^n \right) \text{ et donc } \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge.}$$

**Preuve.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < r$ . Alors  $|a_n z^n| = |a_n r^n| \left( \frac{|z|}{r} \right)^n = O_{+\infty}(1) \left( \frac{|z|}{r} \right)^n = O_{+\infty} \left( \left( \frac{|z|}{r} \right)^n \right)$

Comme  $0 \leq \frac{|z|}{r} < 1$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{|z|}{r} \right)^n$  converge et donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  converge absolument par comparaison de séries à termes positifs. ■

**I.2.3 Exemple**

On considère la série entière  $\sum \sin(n) z^n$ .  $r = 1$  convient donc  $D_1$  est inclus dans le domaine de convergence.

**I.2.4 Définition-Proposition**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série entière.

1. L'ensemble  $I = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[0, \dots$
2.  $R = \sup(I) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  est appelé **rayon de convergence** de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$

**Preuve.**

Il faut montrer que  $I$  est un intervalle de la forme  $[0, a)$  (borne ouverte ou fermée,  $a \in \overline{\mathbb{R}^+}$ ). Il suffit de montrer que si  $r \in I$  alors  $[0, r] \subset I$  ie que tous les nombres inférieurs à  $r$  sont encore dans  $I$ .

Soit  $r \in I$  et  $\rho \in [0, r]$ . Alors, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq |a_n| \rho^n = |a_n| r^n \underbrace{\frac{\rho^n}{r^n}}_{\leq 1} \leq |a_n| r^n$  et donc  $(|a_n| \rho^n)$  est bornée,

c'est à dire que  $\rho \in I$ . ■



**Rayon de référence**

Le rayon de convergence de la série géométrique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$  vaut 1.

La série entière nulle possède un rayon de convergence infini.

**I.2.5 Exemple**

Calculons le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} z^n$ .

- Si  $|z| > 1$  alors  $\left(\frac{z^n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée (son module tend vers  $+\infty$ ).
- Si  $|z| < 1$ ,  $\left(\frac{z^n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 donc est bornée.

Finalement,  $I = [0, 1[$  et donc  $R = 1$ .

**Rayon nul**

On peut très bien avoir  $I = [0, 0] = \{0\}$  (et donc  $R = 0$ ) c'est à dire que pour tout  $r > 0$ ,  $(a_n r^n)$  n'est pas bornée. Par exemple  $a_n = n!$  convient.

**I.2.6 Théorème**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

1. Si  $|z| < R$  alors la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  converge.
2. Si  $|z| > R$  alors la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  diverge grossièrement.
3. Si  $|z| = R$  on ne peut pas conclure sur la nature de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ .

**Preuve.**

1. Il s'agit juste un redite du lemme d'Abel (si  $|z| < R$  alors  $|z| < r$  pour un  $r \in I$ ).
2. Il suffit de remarquer qu'une suite non bornée ne peut tendre vers 0 (car toute suite convergente est bornée).
3. Reprenons la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} z^n$ . Pour  $z = 1$ , il s'agit de la série harmonique, notoirement divergente. Pour  $z = -1$ , on trouve une série convergente. ■

**Domaines de convergence**

1. Une série entière réelle (on calcule  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour  $x$  réel) est convergente au moins sur l'intervalle  $] -R, R[$  où  $R$  est le rayon de convergence. La convergence en  $\pm R$  est éventuellement à étudier au cas par cas.
2. Pour une série complexe, la série converge sur  $D_R$ . Sur l'ensemble  $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ , on ne peut rien dire a priori.

**Contra posées**

Si on trouve un  $z \in \mathbb{C}$  tel que la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  converge alors  $R \geq |z|$ .

Si on trouve un  $z \in \mathbb{C}$  tel que la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  diverge alors  $R \leq |z|$ .

**I.3 Calcul du rayon de convergence****Rayon 1**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ .

1. Si  $(a_n)$  n'est pas bornée (par exemple  $a_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$ ) alors  $R \leq 1$ .
2. Si  $(a_n)$  est bornée (par exemple  $(a_n)$  converge), alors  $R \geq 1$ .

**I.3.1 Proposition**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série de convergence de rayon de convergence  $R_a$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R_b$

1. Si  $a_n = O_{+\infty}(|b_n|)$  alors  $R_a \geq R_b$  (un cas particulier :  $a_n = o_{+\infty}(|b_n|)$ ).
2. Si  $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$  alors  $R_a = R_b$ .

**Preuve.**

1. Soit  $r < R_b$ . On doit montrer que  $(|a_n| r^n)$  est bornée (et donc que  $r \leq R_a$ ). Or par hypothèse, on peut poser  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que  $|a_n| \leq M|b_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $|a_n| r^n \leq M|b_n| r^n$  et  $(|b_n| r^n)$  est bornée donc  $(|a_n| r^n)$  est bornée aussi. Ainsi  $r \leq R_a$  et tout nombre plus petit que  $R_b$  est plus petit que  $R_a$ . On ne peut pas avoir  $R_a < R_b$ , c'est à dire qu'on a prouvé  $R_a \geq R_b$ .
2. C'est une conséquence directe car dans ce cas  $a_n = O_{+\infty}(|b_n|)$  et  $b_n = O_{+\infty}(|a_n|)$ . ■

**I.3.2 Exemple**

Le rayon de convergence de  $\sum \sin(\frac{1}{n})z^n$  est 1 car  $\sin(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

**Conséquence**

Comme pour les séries numériques, on peut commencer par calculer un équivalent simple de  $a_n$  et raisonner sur cet équivalent.

**I.3.3 Exemple**

Trouver le rayon de convergence de  $\sum 2n(e - (1 + \frac{1}{n})^n)z^n$ .

On a  $(1 + \frac{1}{n})^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n})) = \exp(1 - \frac{1}{2n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})) = e^1(1 - \frac{1}{2n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n}))$ . Ainsi  $2n(e - (1 + \frac{1}{n})^n) \underset{+\infty}{\sim} 1$  et le rayon cherché vaut 1.

**I.3.4 Théorème**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série de convergence de rayon de convergence  $R_a$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R_b$ .

1. Pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda a_n z^n$  est de rayon de convergence  $R_a$ . Le cas  $\lambda = 0$  donne un rayon infini.
2. Le rayon de convergence  $R$  de la série somme vérifie  $R = \min(R_a, R_b)$  si  $R_a \neq R_b$  et  $R \geq R_a$  dans le cas  $R_a = R_b$ .
3. Le rayon de convergence  $R$  de la série produit vérifie  $R \geq \min(R_a, R_b)$ .

**Preuve.**

Il s'agit d'une traduction directe des propriétés de convergences vu dans le chapitre sur les séries. Le méthode est la suivante : on prend  $r < R$  (le rayon de convergence que l'on veut calculer) et on prouve la convergence par application du chapitre sur les séries numériques. La remarque I.2 conclut. ■

**Inégalités strictes**

On peut tout à fait avoir des inégalités strictes dans le théorème précédent. Il suffit de considérer des séries opposées pour la somme et le produit par la série nulle.

**I.3.5 Proposition**

Soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont le même rayon de convergence.

**Preuve.**

Notons  $R_1$  et  $R_2$  ces deux rayons (respectifs). Comme  $a_n = o_{+\infty}(n|a_n|)$ ,  $R_1 \geq R_2$ . On traite maintenant le cas  $R_1 > 0$ .

Soit  $r < R_1$ . Montrons que  $(n|a_n|r^n)$  est bornée. Soit  $r' \in ]r, R_1[$ . Alors, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n|a_n|r^n = \underbrace{|a_n|(r')^n}_{\text{bornée}} \times n \left(\frac{r}{r'}\right)^n$ .

Or, par croissances comparées,  $n \left(\frac{r}{r'}\right)^n \xrightarrow{+\infty} 0$  et est donc bornée. Par produit,  $(n|a_n|r^n)$  est bornée. Ainsi  $r \leq R_2$  et finalement  $R_2 \geq R_1$ . ■

**I.3.6 Exemple**

Les séries suivantes sont de rayon de convergence 1 :  $\sum n^2 z^n, \sum \frac{1}{n^2} z^n, \sum P(n)z^n$  où  $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ .

**I.4 d'Alembert**

Commençons par un rappel :

**I.4.1 Théorème (Règle de d'Alembert)**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ . Supposons que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$ .

1. Si  $\ell < 1$  alors  $\sum u_n$  converge (on a même  $\forall q \in ]\ell, 1[ u_n = o_{+\infty}(q^n)$ ).
2. Si  $\ell > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge grossièrement ( $u_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$ ).
3. Si  $\ell = 1$  la série  $\sum u_n$  peut être divergente ou convergente.

**Application au calcul de rayon de convergences**

1. Calculer le rayon de convergence de  $\sum \frac{z^n}{n!}$ . Pour  $z \neq 0$  on pose  $u_n = \frac{|z|^n}{n!} > 0$ . Alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{+\infty} 0$  et donc  $\sum \frac{z^n}{n!}$  converge (absolument).  
Ainsi  $R \geq |z|$  pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $R = +\infty$ .
2. On pose  $a_n = \binom{2n}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer le rayon de convergence  $R$  de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ . Pour  $z \neq 0$  on pose  $u_n = \binom{2n}{n} |z|^n > 0$ . Alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} |z| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z| \xrightarrow{+\infty} 4|z|$ .  
Ainsi si  $|z| > \frac{1}{4}$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  diverge donc  $R \leq \frac{1}{4}$ . De plus, si  $|z| < \frac{1}{4}$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  converge donc  $R \geq \frac{1}{4}$ . Finalement  $R = \frac{1}{4}$ .

**II Propriétés de la somme, cas réel**

Dans cette partie, on note  $\sum a_n x^n$  les séries entières et on considère que  $x$  est réel (peu importe pour les  $a_n$ ). Ainsi, si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  est de rayon  $R > 0$  on considère la fonction (qui est la somme de la série)  $f : \begin{cases} ]-R, R[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$ .

**II.1 Intégration**

**II.1.1 Théorème**

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Alors  $f$  est continue sur  $] -R, R[$ .

**Preuve.**

Cette preuve est hors programme...

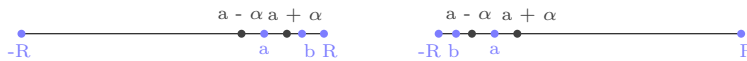
Soit  $a \in ] -R, R[$ . Montrons que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ . Il s'agit d'un résultat d'inversion de limites.

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On note  $S_N : x \mapsto \sum_{n=0}^N a_n x^n$ . Alors, pour  $x \in ]-R, R[$ ,  $S_N(x) - S_N(a) = \sum_{n=1}^N a_n (x^n - a^n) = (x - a) \sum_{n=1}^N a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$ . Ainsi

$$|S_N(x) - S_N(a)| \leq |x - a| \sum_{n=1}^N |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k |a^k|$$

On se restreint maintenant à des valeurs de  $x$  dans  $[a - \alpha, a + \alpha]$  pour un  $\alpha$  bien choisi (de telle manière que cette intervalle soit inclus dans  $] - R, R[$ ).

Soit  $b \in ]-R, R[$  tel que  $|b| > \max(|a - \alpha|, |a + \alpha|)$ .



Alors  $|S_N(x) - S_N(a)| \leq |x - a| \sum_{n=1}^N n a_n |b|^n$ . D'après I.3.5, la somme partielle du majorant converge vers  $K \in \mathbb{R}^+$  qui ne dépend pas de  $x$  (seulement de  $\alpha$ , qui lui ne dépend que de  $a$ ). Par passage à la limite en faisant  $N \rightarrow +\infty$ ,  $|f(x) - f(a)| \leq |x - a|K$  et donc par encadrement (cette fois  $x \rightarrow a$ ),  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ . ■

**Exercice 20**

Soit  $f$  une fonction définie par une série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R = +\infty$  avec  $a_0 < 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} a_n > 0$ . Montrer que  $f$  s'annule au moins une fois.

**II.1.2 Exemple**

Posons  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$ . Alors  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ . De plus, pour  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1}$  et aussi

pour  $x = 0$ . Donc  $f$  est bien la somme de cette série entière sur  $\mathbb{R}$  en entier et donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en entier.

**II.1.3 Théorème (Intégration terme à terme)**

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

$$\forall x \in ]-R, R[ \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

Remarquons que les séries entières qui interviennent ici sont de rayon de convergence  $R$  exactement d'après I.3.5

**Preuve.**

Encore une fois hors programme.

Soit  $x \in ]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[$  et  $t$  entre 0 et  $x$ . Soit également  $N \in \mathbb{N}$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^N a_n t^n dt = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Il s'agit encore une fois de pouvoir faire tendre  $N$  vers  $+\infty$ .

$$\text{Or } \left| \int_0^x f(t) dt - \int_0^x \sum_{n=0}^N a_n t^n dt \right| = \left| \int_0^x \left( f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right) dt \right| = \left| \int_0^x \left( \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n t^n \right) dt \right|$$

On voit apparaître des restes de séries numériques absolument convergentes, appliquons l'inégalité triangulaire (sur l'intégrale et la série, on conserve la valeur absolue extérieure au cas où  $x \leq 0$ ).

$$\left| \int_0^x f(t) dt - \int_0^x \sum_{n=0}^N a_n t^n dt \right| \leq \left| \int_0^x \left( \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| |t|^n \right) dt \right|$$

Or, pour  $t$  entre 0 et  $x$ ,  $|a_n||t|^n \leq |a_n||x|^n$ . De plus,  $\sum a_n x^n$  converge absolument donc on peut trouver  $N_0$  tel que  $\forall N \geq N_0 \quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n||x|^n \leq \varepsilon$  pour un  $\varepsilon > 0$  fixé.

Alors, pour ces  $N$ ,  $\left| \int_0^x f(t)dt - \int_0^x \sum_{n=0}^N a_n t^n dt \right| \leq \left| \int_0^x \varepsilon dt \right| = \varepsilon|x|$  qui peut être rendu arbitrairement proche de 0.

Ainsi,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1} x^n = \int_0^x f(t)dt$ . ■

### II.1.4 Exemple

Pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ .

### II.1.5 Exemple

Exprimer  $\arctan(x)$  comme somme d'une série pour  $x \in ]-1, 1[$ .

### II.1.6 Corollaire

Sous les mêmes hypothèses que le théorème, on peut calculer, pour  $a, b \in ]-R, R[$  l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  en intégrant la somme terme à terme.

L'hypothèse importante est que  $a, b$  doivent être à l'intérieur de  $]-R, R[$  et pas une borne de cet intervalle.

## II.2 Dérivation

### II.2.1 Théorème

Soit  $f$  la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ .

$f$  est dérivable sur  $]-R, R[$  et pour  $x \in ]-R, R[$  on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

. Remarquons que la série entière qui définit  $f'$  est également de rayon de convergence  $R$ .

#### Preuve.

Hors programme.

Posons, au hasard,  $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$  qui est bien définie sur  $]-R, R[$ , continue et que l'on peut intégrer terme à terme d'après le théorème II.1.3. Alors pour  $x \in ]-R, R[$ ,  $\int_0^x g(t)dt = f(x) - a_0$  et donc  $f$  est une primitive de  $g$ .

Ainsi  $f$  est dérivable et  $f' = g$ . ■

### II.2.2 Exemple

Calculons  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ .

Premièrement la série entière  $\sum_{n \geq 1} x^n$  est de rayon de convergence 1. Notons  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$  sa somme. Sa dérivée est  $f' : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ . Ainsi  $S = f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$ .

### II.2.3 Théorème

Soit  $f$  la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ . Alors  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]-R, R[$  et les dérivées de  $f$  sont obtenues par dérivation terme à terme de la série entière, ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in ]-R, R[ \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

**Preuve.**

Simple récurrence. Hors programme aussi. ■

**II.2.4 Exemple**

$$\text{Posons } f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases} .$$

Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, pour  $x \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$  on a  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ . Cette relation est encore vraie en 0. Ainsi  $f \in \mathcal{C}^\infty ]-1, 1[$  et finalement  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**II.2.5 Corollaire**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et  $f$  sa somme. Alors  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Taylor**

Nous ne sommes pas si étonnés de ce résultat. On retrouve les coefficients du développement de Taylor de  $f$  (qui est  $\mathcal{C}^\infty$ ) en 0.

**II.2.6 Corollaire**

Les coefficients d'une série entière de **rayon non nul** sont uniques.

Plus précisément, si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$  sont de rayons non nuls et vérifient pour un  $\alpha > 0$  que

$$\forall x \in ]-\alpha, \alpha[ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

alors  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n$ .

**II.2.7 Exemple**

Cherchons une fonction  $f$  somme d'une série entière qui vérifie  $f' = f$ . Notons  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  la série cherchée de rayon  $R > 0$  (inconnu pour l'instant).

Alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$  pour tout  $x \in ]-R, R[$ . Alors on a pour tout  $n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$ . Par récurrence immédiate  $\forall n \geq 1 \quad a_n = \frac{1}{n!}a_0$  et  $f = a_0 \exp$  qui est bien de rayon  $R = +\infty > 0$ .

### III Développement en série entière

#### III.1 Taylor

**Théorème fondamental du calcul différentiel**

Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  non vide et non réduit à un point et  $a \in I$  alors  $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule en  $a$ .

En particulier, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $x \in I$ , on a  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ .

**III.1.1 Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ , (où  $I$  est un intervalle non vide et non réduit à un point)  $a, x \in I$ . Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

**Preuve.**

La preuve se fait par récurrence, le théorème fondamental du calcul différentiel étant le cas  $n = 0$ .

Pour l'hérédité, on effectue une intégration par parties :  $f^{(n+1)}(t) \xrightarrow{'} f^{(n+2)}(t)$  et  $\frac{(x-t)^n}{n!} \xrightarrow{'} -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$  (la variable étant  $t$ ,  $x$  est fixé). ■

### Inégalité des accroissements finis

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < x$  et  $f \in \mathcal{C}([a, x], \mathbb{R})$ . On suppose en plus que  $f$  est dérivable sur  $]a, x[$ .

1. Si on peut trouver  $m, M \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall t \in ]a, x[$   $m \leq f'(t) \leq M$  alors  $m(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq M(x - a)$ .
2. Si on peut trouver  $K \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall t \in ]a, x[$   $|f'(t)| \leq K$  alors  $|f(x) - f(a)| \leq K|x - a|$  qui reste vrai même quand  $x < a$  (à condition de réécrire l'intervalle sous la forme  $]x, a[$ ).

#### III.1.2 Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$  (où  $I$  est un intervalle non vide et non réduit à un point) et  $a, x \in I$ .

On pose  $M$  la valeur maximale de  $|f^{(n+1)}(t)|$  pour  $t$  entre  $a$  et  $x$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

#### Preuve.

$M$  existe car  $|f^{(n+1)}|$  est continue sur un intervalle fermé et borné.

Il s'agit ensuite seulement de majorer le reste intégral en utilisant l'inégalité triangulaire sur les intégrales puis la majoration  $|f^{(n+1)}| \leq M$ . ■

## III.2 Fonctions développables

### III.2.1 Définition

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  tel que  $0 \in I$  et  $0$  n'est pas une borne de  $I$ . Le **développement de Taylor** de  $f$  est la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

### III.2.2 Exemple

On a déjà vu que  $\exp$  est la somme de son développement de Taylor sur  $\mathbb{R}$  :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

### III.2.3 Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  est intervalle qui contient  $0$  (et  $0$  n'est pas une borne de  $I$ ). On dit que  $f$  est **développable en série entière** (au voisinage de  $0$ ) ssi il existe  $r > 0$  et une série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  tels que :

- $] -r, r[ \subset I$
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  est de rayon  $R \geq r$
- $\forall x \in ] -r, r[ \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

Autrement dit,  $f$  est la somme d'une série entière sur un intervalle  $] -r, r[ \neq \emptyset$  contenu dans  $I$ .

La série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  est appelée **développement en série entière** de  $f$ .

### Résumé

Soit  $f$  une fonction développable en série entière sur  $] -r, r[$  avec  $r > 0$ .

1.  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -r, r[$ .
2. Le développement en série entière est unique sur  $] -r, r[$  et il s'agit du développement de Taylor de  $f$ .
3. Toute primitive de  $f$  est développable en série entière sur  $] -r, r[$ .
4. Les dérivées successives de  $f$  sont développables en série entière sur  $] -r, r[$ .

### Remarque

Il y a des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sans être développable en série entière. Par exemple  $f : x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$  prolongée en  $0$  par  $f(0) = 0$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  (par récurrence, et application précise du théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ ). Par contre sa série de Taylor est nulle et donc  $f$  ne coïncide avec cette série sur aucun intervalle infini centré en  $0$ .

**Parité**

Si  $f$  est DSE et paire, alors les  $a_{2n+1}$  sont nuls. Si  $f$  est impaire, les  $a_{2n}$  sont nuls.

**III.3 Développements en pratique**

Dans les preuves des résultats qui suivent se trouvent les méthodes principales pour prouver qu'une fonctions est développable et calculer son développement.

**III.3.1 Exemple**

Donner le DSE (si possible) de  $f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x}$  qui est définie sur  $] - \infty, -1[$ . Soit  $x \in ] - 1, 1[$  (dans l'intervalle de convergence des deux séries entières que l'on voit apparaître ici).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n$$

A priori ce produit de Cauchy a un rayon de convergence  $R \geq 1$  (cf théorème I.3.4) Or  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} = (H_n)_{n \geq 1}$  diverge donc la suite  $(H_n 1^n)$  n'est pas bornée. Ainsi  $R \leq 1$ . Finalement  $R = 1$  et  $f$  est développable sur  $] - 1, 1[$ .

Remarque : on ne pouvait pas espérer beaucoup plus pour un DSE, vu que  $f$  est définie sur  $] - \infty, 1[$ . Ceci n'empêchait pas a priori la série entière d'avoir un rayon plus grand que 1...

**III.3.2 Proposition**

sin et cos sont développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ et } \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

**Preuve.**

Prouvons le pour cos.

Premièrement, le rayon de convergence de la série considéré est  $+\infty$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $N \in \mathbb{N}$ . Alors  $|\cos^{(N+1)}| \leq 1$  sur tout intervalle et d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre 0 et  $x$  :

$$\left| \cos(x) - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right| \leq \frac{|x|^{2N+1} \times 1}{(2N+1)!}$$

Par croissances comparées  $\frac{|x|^{2N+1}}{(2N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  et cos coïncide bien avec son développement de Taylor sur  $\mathbb{R}$ . ■

**III.3.3 Proposition**

sh et ch sont développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \text{ et } \text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

**Preuve.**

Similaire. A faire en exo. ■

**III.3.4 Proposition**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$  est développable en série entière sur  $] - 1, 1[$  et

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Si  $\alpha \in \mathbb{N}$ , le rayon de convergence est  $+\infty$  et le développement est en fait une somme finie.



**Preuve.**

Considérons le problème de Cauchy  $\begin{cases} y(0) = 1 \\ (1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0 \end{cases}$ . Clairement  $f_\alpha$  est solution sur  $] -1, +\infty[$ .

On considère que  $\alpha \notin \mathbb{N}$ .

— Analyse Cherchons maintenant une solution  $g$  somme d'une série entière de rayon  $R > 0$ ,  $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ .

Alors

$$\begin{aligned} (1+x)g'(x) - \alpha g(x) = 0 &\iff (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\iff \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-\alpha) a_n x^n = 0 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} + (n-\alpha) a_n) x^n = 0 \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière (valable si  $R > 0$ ), on obtient la relation :  $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{(n+1)} a_n$ . De plus, on doit avoir  $g(0) = 1$  c'est à dire  $a_0 = 1$ . Par récurrence immédiate,  $a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha-k)}{n!}$ .

— Synthèse Considérons la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  où  $a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha-k)}{n!} \neq 0$ . Calculons le rayon de convergence  $R$  de cette série. Pour  $x \neq 0$  on a

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|\alpha-n|}{n+1} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times |x|$$

Ainsi si  $|x| > 1$  la série entière diverge et donc  $R \leq 1$ . De plus, si  $|x| < 1$  la série converge et donc  $R \geq 1$ . Finalement,  $R = 1 > 0$  et le calcul fait dans l'analyse montre que la fonction somme est solution du problème de Cauchy considéré sur  $] -1, 1[$ .

Par unicité de la solution à un problème de Cauchy (sur un intervalle),  $f_\alpha$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ . ■

**III.3.5 Exemple**

Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Donnons le DSE de  $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^p}$  qui est de rayon 1 d'après le théorème précédent.

Nous devons calculer, pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\prod_{k=0}^{n-1} (-p-n) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (p+n) = (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}$ . Ainsi, pour  $x \in ] -1, 1[$

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!} \frac{1}{n!} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} x^n$$

**III.3.6 Exemple**

Montrons que arcsin est DSE et donnons son développement.

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  est DSE sur l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in ] -1, 1[ \} = ] -1, 1[$ . et on a pour  $x \in ] -1, 1[$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) \frac{1}{n!} (-1)^n x^{2n}$$

(rappel : un produit vide vaut 1 par convention).

Or pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{-2k-1}{2} = \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2n)!}{2^n n!}$  par l'opération classique consistant à multiplier et diviser par le produit des nombres pairs entre 2 et 2n.

Finalement,  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^{2n}$ . Par intégration terme à terme :

$$\arcsin(x) = \underbrace{0}_{\arcsin(0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)4^n} x^{2n+1}$$

et le rayon de convergence est 1.

## Formulaire

A savoir	
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$x \in ]-1, 1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$x \in ]-1, 1[$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$x \in ]-1, 1[$
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
A savoir refaire	
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$x \in ]-1, 1[$
$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)4^n} x^{2n+1}$	$x \in ]-1, 1[$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$x \in ]-1, 1[$

# Chapitre 6

## Compléments sur les espaces vectoriels

Dans ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I Bases en dimension quelconques

#### I.1 Familles libres

##### Rappel

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev, une famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est dite libre ssi

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0_E \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}.$$

La seule manière d'obtenir le vecteur nul par combinaison linéaire des  $u_k$  est la combinaison triviale.

##### I.1.1 Proposition

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

- une famille qui contient le vecteur nul est liée.
- une famille libre possède au plus  $n$  vecteurs.
- une famille libre possédant  $n$  vecteurs est une base de  $E$ .
- on ne modifie pas le caractère libre en effectuant une opération élémentaire sur les vecteurs d'une famille.
- une famille est libre ssi chacun de ses vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des autres.

#### Familles infinies

On se place dans  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Les familles suivantes sont des familles infinies.

1.  $(x \mapsto \sin(nx))_{n \in \mathbb{Z}}$ .
2.  $(x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{C}}$ .

Il s'agit de se donner un ensemble d'éléments repérés par un indice. Pour le deuxième exemple, on a associé une fonction à chaque nombre complexe.

##### I.1.2 Définition

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension quelconque et  $X$  un ensemble (quelconque lui aussi). Soit  $(u_i)_{i \in X}$  une famille de vecteurs de  $E$ . Cette famille est dite libre ssi pour tout  $I \subset X$  ensemble **fini**, la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est libre.

D'une manière équivalente, aucun des  $u_i$  n'est une combinaison linéaire (finie, évidemment...) des autres  $u_j$ .

##### I.1.3 Exemple

Dans  $\mathbb{K}[X]$ , la famille  $(1, X, X^2, \dots) = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$  est libre. Preuve : unicité des coefficients d'un polynôme.

##### I.1.4 Exemple

Dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , la famille  $(\cos(n \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$  est libre. Montrons par récurrence que  $(\cos(n \cdot))_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$  est libre, sachant que le cas  $k = 0$  est trivial.

Supposons que  $(\cos(n\cdot))_{n \in \llbracket 0, k \rrbracket}$  est libre et soient  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$ . Supposons que  $\forall x \in \mathbb{R} \sum_{n=0}^{k+1} \lambda_n \cos(nx) = 0$  (1).

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On dérive deux fois la relation précédente :  $\sum_{n=0}^{k+1} -n^2 \lambda_n \cos(nx) = 0$  (2)

Si on calcule  $(k+1)^2(1) + (2)$  on obtient  $\sum_{n=0}^k \lambda_n ((k+1)^2 - n^2) \cos(nx) = 0$  (les derniers termes s'annulent). Par hypothèse de récurrence,  $\lambda_n ((k+1)^2 - n^2) = 0$  pour tout  $n \in \llbracket 0, k \rrbracket$  ie  $\lambda_n = 0$ .

Finalement, en reprenant (1),  $\lambda_{k+1} = 0$  car  $\cos((k+1)\cdot)$  n'est pas la fonction nulle.

### I.1.5 Exemple

Soit  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille de polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  telle que  $\forall k \in \mathbb{N} \deg(P_k) = k$ . Alors cette famille est libre.

En effet, si  $\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i = 0$  pour un entier  $n$  et des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  alors le coefficient dominant de la somme est  $\lambda_n \times$  le coefficient dominant de  $P_n$ . Donc  $\lambda_n = 0$ .

Ceci constitue l'hérédité d'une récurrence qui est trivialement initialisée (un polynôme de degré nul est un polynôme constant non nul donc constitue une famille libre à 1 élément).

### I.1.6 Proposition

Toute famille de polynômes tous non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.

## I.2 Familles génératrices

### I.2.1 Proposition

Soit  $E$  un espace de dimension  $n$  et  $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$  une famille.

- si  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$  alors  $p \geq n$ .
- on peut avoir  $p > n$  sans que  $\mathcal{F}$  soit génératrice de  $E$
- si  $p = n$  et que  $\mathcal{F}$  est génératrice, alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ .
- si  $e_p \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$  alors  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$
- on ne modifie pas l'espace engendré en faisant subir une opération élémentaire à la famille  $\mathcal{F}$ .

### I.2.2 Exemple

Montrer que  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - z + t = 0 \text{ et } x - 3y + t = 0\}$  est un espace vectoriel et en donner une famille génératrice.

### I.2.3 Définition-Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $A \subset E$ . L'ensemble des sous-espaces de  $E$  qui contiennent  $A$  possède un minimum pour l'inclusion. Cet espace est noté  $\text{Vect}(A)$  et est appelé espace vectoriel engendré par  $A$ .

On peut le décrire comme l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de  $A$ .

#### Preuve.

Notons  $\Omega = \{F \subset E \mid A \subset F \text{ et } F \text{ est un sev de } E\}$ . Alors  $\Omega \neq \emptyset$  car  $E \in \Omega$ .

Posons  $G = \bigcup_{F \in \Omega} F$  l'intersection de tous les éléments de  $\Omega$ . Clairement (par construction),  $A \subset G$ .

Alors  $0_E \in G$  car  $0_E$  est un élément de tout sous espace de  $E$ . Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $x, y \in G$  alors  $x$  et  $y$  sont élément de tout  $F \in \Omega$  et donc  $\lambda x + \mu y$  est élément de tout  $F \in \Omega$ . Ainsi  $\lambda x + \mu y \in G$  et  $G$  est bien un sous-espace de  $E$ .

SI maintenant on considère  $F$  un sous espace de  $E$  qui contient  $A$  alors  $F \in \Omega$  et par construction  $G \subset F$ , ce qui prouve que  $G$  est bien le minimum de  $\Omega$  pour l'inclusion.

Finalement, toute combinaison linéaire d'éléments de  $A$  est dans  $G$  par stabilité, et l'ensemble des combinaisons d'éléments de  $A$  est un sev de  $E$  (cf cours de sup). ■

**I.2.4 Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $X$  un ensemble et  $(e_i)_{i \in X}$  une famille d'éléments de  $E$ . On dit que  $(e_i)_{i \in X}$  est génératrice de  $E$  ssi pour tout  $u \in E$  on peut trouver un ensemble fini  $I \subset X$  et  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaires tels que  $u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ .

Ainsi tout élément de  $E$  est une combinaison linéaire (la somme est finie) d'éléments de  $(e_i)_{i \in X}$  et on a  $E = \text{Vect}((e_i)_{i \in X})$ .

**I.2.5 Exemple**

$(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}[X]$ .

**I.2.6 Exemple**

Soit  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille de polynômes vérifiant  $\forall k \in \mathbb{N} \deg(P_k) = k$ . Montrons que cette famille est génératrice de  $\mathbb{K}[X]$ .

En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(P_0, \dots, P_n)$  est libre dans  $\mathbb{K}_n[X]$  donc engendre  $\mathbb{K}_n[X]$  qui est de dimension  $n + 1$ . Comme tout polynôme non nul possède un degré  $n$ , il est combinaison linéaire des  $n + 1$  premiers  $P_k$ , ce qui prouve le caractère générateur.

Un exemple de telle base est la famille  $((X - a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$  pour un  $a \in \mathbb{K}$  fixé. Les coordonnées d'un polynôme  $P$  sont alors les  $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$  d'après le théorème de Taylor.

**I.3 Bases****I.3.1 Définition**

Soit  $X$  un ensemble et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. On dit que  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in X}$  est une base de  $E$  ssi  $(e_i)_{i \in X}$  est à la fois libre et génératrice de  $E$ .

Dans ce cas, pour tout  $u \in E$  il existe un unique ensemble fini  $I \subset X$  et une unique famille de scalaires  $(x_i)_{i \in I}$  (appelée coordonnées de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ ) tels que  $u = \sum_{i \in I} x_i e_i$ .

**I.3.2 Proposition**

$\mathcal{B} = (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$  appelée base canonique.

**Remarque**

De manière plus générale, si on choisit  $P_k \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  alors  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$ .

**II Espaces vectoriels****II.1 Sous-espaces et dimension****II.1.1 Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. On dit que  $E$  est de dimension finie ssi  $E$  possède une famille génératrice finie  $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$  c'est à dire que chaque élément de  $x \in E$  peut s'écrire sous la forme  $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k$  où les  $\lambda_k$  sont des scalaires.
2. Dans le cas où  $E$  est de dimension finie,  $E$  possède au moins une base et toutes les bases de  $E$  ont le même cardinal que l'on appelle la **dimension** de  $E$  et que l'on note  $\dim_{\mathbb{K}}(E)$  ou plus simplement  $\dim(E)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur  $\mathbb{K}$ .

**II.1.2 Exemple**

1.  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$ , une base est  $(1)$
2.  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$  et la base canonique est  $(1, i)$ .
3.  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$ .
4.  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$
5.  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$
6.  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}_n[X]) = 2n + 2$

**II.1.3 Théorème**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $F$  un sous-espace de  $E$ .

1.  $F$  est de dimension fini et  $\dim(F) \leq n$
2.  $F = E$  ssi  $\dim(F) = n$

**II.1.4 Exemple**

On se sert très souvent de la deuxième partie de cette propriété pour prouver l'égalité de deux espaces.

Considérons par exemple le plan  $P : x + y + z = 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On vérifie aisément que  $u = (1, -1, 0)$  et  $v = (1, 0, -1)$  sont des éléments de  $P$  et donc  $\text{Vect}(u, v) \subset P$ . De plus,  $\text{Vect}(u, v)$  est de dimension 2, tout comme  $P$  car  $(u, v)$  est libre. Donc  $P = \text{Vect}(u, v)$  (et on a en fait trouvé une base de  $P$ ).

**Une formule de dimension**

$$\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$$

**II.2 Supplémentaires****II.2.1 Définition**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F, G$  deux sous-espaces. La somme de  $F$  et  $G$  est  $F + G = \{x_F + x_G \mid x_F \in F \text{ et } x_G \in G\}$ . C'est un espace vectoriel et on a même  $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$ .

**II.2.2 Exemple**

Dans  $\mathbb{R}^2$ , la somme de deux droites vectorielles non confondues est  $\mathbb{R}^2$ .

Dans  $\mathbb{R}^3$  la somme d'un plan et d'une droite non contenue dans ce plan est  $\mathbb{R}^3$ .

**Famille génératrice**

Si on dispose d'une famille  $(u_i)$  génératrice de  $F$  et d'une famille  $(v_i)$  génératrice de  $G$ , alors la concaténation de ces familles engendre  $F + G$ .

Ainsi, en dimension finie,  $\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$ .

**II.2.3 Exemple**

Donner une base de  $P_1 + P_2$  où  $P_1 : x - y + 2z = 0$  et  $P_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

**II.2.4 Définition**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F, G$  deux sous-espaces. On dit que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  et on note  $E = F \oplus G$  ssi

$$\forall x \in E \exists! (x_F, x_G) \in F \times G \text{ tel que } x = x_F + x_G$$

Avec ces notations,  $x_F$  est appelé le projeté de  $x$  sur  $F$  dans la direction  $G$  (ou parallèlement à  $G$ ) et  $x_G$  le projeté de  $x$  sur  $G$  dans la direction  $F$ .

**Caractérisation**

$$\text{On a également } E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}.$$

**II.2.5 Exemple**

1.  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  et la décomposition associée est  $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ . Ainsi la projection d'une matrice  $A$  sur l'ensemble des matrices symétrique, dans la direction de l'ensemble des matrices anti-symétriques est  $\frac{A + {}^tA}{2}$ .
2. Notons  $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est paire}\}$  et  $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}$ . Alors  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$ , les projections d'une fonction  $f$  sur  $F$  et  $G$  étant respectivement  $x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  et  $x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ .

**II.2.6 Théorème (Théorème de la base adaptée)**

Soit  $E$  un espace de dimension finie et  $F, G$  des sous-espaces de  $E$ .

$E = F \oplus G$  ssi la concaténation d'une base de  $F$  et d'une base de  $G$  est une base de  $E$ . On dit que la base obtenue (par concaténation) est **adaptée** à la somme  $F \oplus G$ .

On a alors évidemment

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Dans ce cadre, déterminer les projections se ramène au calcul de coordonnées dans une base adaptée.

**II.2.7 Corollaire**

En dimension finie, tout sous-espace possède au moins un supplémentaire.

**II.2.8 Théorème (Théorème de )**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F, G$  deux sous-espaces de dimensions finies; Alors  $F + G$  est de dimension finie et

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

**II.2.9 Corollaire**

Dans un espace de dimension finie, on a  $E = F \oplus G \iff \begin{cases} F + G = E \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases} \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$

**II.2.10 Exercice**

Caractériser (donner une ou des CNS sur) les espaces supplémentaires dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

**II.3 Sommes directes d'espaces vectoriels****II.3.1 Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F_1 \dots F_p$  des sous-espaces de  $E$ .

1. La somme des espaces  $(F_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est  $\sum_{i=1}^p F_i = \{u_1 + \dots + u_p \mid u_1 \in F_1 \text{ et } u_2 \in F_2 \text{ et } \dots \text{ et } u_p \in F_p\}$ . C'est le sous-espace de  $E$  engendré par les  $F_i$
2. On dit que la somme  $F = \sum_{i=1}^p F_i$  est **directe** et on note  $F = \bigoplus_{i=1}^p F_i$  ssi tout vecteur  $u \in F$  s'écrit de manière **unique** sous la forme  $u = u_1 + \dots + u_p$  avec  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket u_i \in F_i$ .

La somme et la somme directe sont associatives, ce qui permet de justifier a posteriori l'utilisation de  $\sum$  et  $\bigoplus$

**Remarque**

Le cas  $p = 2$  est déjà connu. La somme  $F + G$  est directe ssi  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $F + G$ .

**II.3.2 Exercice**

Trouver 3 espaces  $D_1, D_2, D_3$  tels que  $\mathbb{R}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$ .

**II.3.3 Théorème**

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces de  $E$ . La somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est directe ssi

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^p F_i \quad u_1 + \dots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \dots = u_p = 0_E.$$

Ainsi il suffit de vérifier que le vecteur nul possède une unique écriture sous forme de somme.

**Preuve.**

Si on suppose la somme directe, alors le vecteur nul s'écrit de manière unique comme  $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{0_E}_{\in F_p}$ .

Réciproquement, supposons que  $\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^p F_i \ u_1 + \dots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \dots = u_p = 0_E$ .

Soit  $u \in \sum_{i=1}^p F_i$ . Montrons que sa décomposition en somme est unique.

Si on a  $u = \sum_{i=1}^p u_i = \sum_{i=1}^p u'_i$  avec  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket u_i, u'_i \in F_i$  alors  $\sum_{i=1}^p \underbrace{(u_i - u'_i)}_{\in F_i} = u - u = 0_E$  et donc  $u_i - u'_i = 0_E$

pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  par hypothèse. ■

**II.3.4 Exemple**

Montrer que si  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une base de  $E$  alors  $E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Vect}(e_i)$ .

**II.3.5 Définition-Proposition**

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous espaces de  $E$ , de dimensions finies. Notons  $F = \sum_{i=1}^p F_i$ .

$F = \bigoplus_{i=1}^p F_i$  ssi la concaténation de bases des  $F_i$  est une base de  $F$ .

Une telle base de  $F$  est dite **adaptée** à la somme directe.

**Remarque**

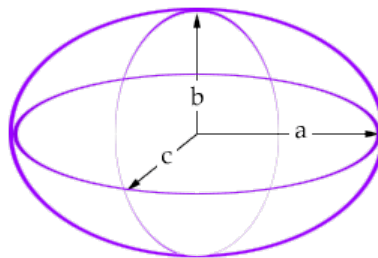
1. Observer le ssi, et surtout la réciproque. Il est facile de décomposer un espace en somme si on en connaît une base. Par exemple  $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(1) \oplus \text{Vect}(X, X^2) \oplus \text{Vect}(X^3)$ .
2. On obtient immédiatement  $\dim \left( \bigoplus_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ .

**5/2**

Quels genre de sous-espaces sont forcément en somme directe ?

**Une application**

Considérons la surface suivante, image d'une sphère par une application linéaire  $f$  simple : On a ici 3 droites (2



à 2 orthogonales d'ailleurs)  $D_a, D_b$  et  $D_c$  telles que sur chaque droite l'application  $f$  est une homothétie de rapport  $a, b$  ou  $c$ .

Comme  $D_a \oplus D_b \oplus D_c = \mathbb{R}^3$ , dans une base de  $\mathbb{R}^3$  adaptée à cette somme directe, la matrice de  $f$  est :

**III Applications linéaires**

**III.1 Propriétés générales**

**III.1.1 Définition**

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est linéaire ssi

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall x, y \in E \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

On a alors  $f(0_E) = 0_F$ .

Si  $F = \mathbb{K}$  on dit que  $f$  est une **forme linéaire**. L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est noté  $\mathcal{L}(E, F)$ .



**III.1.2 Exemple**

Quelques exemples importants (avec des notations évidentes) :  $f \mapsto f'$ ,  $f \mapsto \int_a^b f$ ,  $(u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$ ,  $P \mapsto P(X+1)$ ,  $P \mapsto P(a)$  (avec un  $a \in \mathbb{K}$  fixé).

D'autres plus géométriques : les projections (orthogonales ou non) et symétries, les rotations du plan et de l'espace.

**Application canoniquement associée**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . L'application linéaire canoniquement associée à  $A$  est  $f : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \rightarrow \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto AX \end{cases}$  et la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^p$  et  $\mathbb{K}^n$  de  $f$  est la matrice  $A$ .

**III.1.3 Proposition**

1.  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (de dimension  $\dim(E) \times \dim(F)$  quand  $E, F$  sont de dimensions finies).
2. Quand elle existe, la composée de deux applications linéaires est linéaire.
3. Quand elle existe, la bijection réciproque d'une application linéaire est linéaire.

**III.1.4 Définition**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Son noyau est  $\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$  et son image est  $\text{Im}(f) = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E \ y = f(x)\}$ .

**III.1.5 Exemple**

Notons  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\ker(f)$ .

**III.1.6 Proposition**

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $G$  un sous-espace de  $E$  et  $H$  un sous-espace de  $F$ .

Alors  $f(G)$  et  $f^{-1}(H)$  sont des sous-espaces de  $F$  et  $E$  respectivement. En particulier  $\ker(f)$  est un sous-espace de  $E$  et  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace de  $F$ .

**Preuve.**

— Montrons que  $f(G)$  est un sous-espace de  $F$ .

Soient donc  $x, y \in f(G)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Montrons que  $\lambda x + \mu y \in f(G)$ .

Or  $x, y \in f(G)$  donc on peut poser  $u, v \in G$  tels que  $x = f(u)$  et  $y = f(v)$ . Alors, par linéarité,  $\lambda x + \mu y = f(\lambda u + \mu v) \in f(G)$  car  $\lambda u + \mu v \in G$  (c'est un espace vectoriel).

— Montrons que  $f^{-1}(H)$  est un sous-espace de  $E$ . Soient  $x, y \in f^{-1}(H)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Alors  $f(\lambda x + \mu y) = \underbrace{\lambda f(x)}_{\in H} + \underbrace{\mu f(y)}_{\in H} \in H$  car  $H$  est un sous-espace de  $F$  donc  $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(H)$  ■

**Rappels**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1.  $f$  est injective ssi  $\ker(f) = \{0_E\}$ .
2.  $f$  est surjective ssi  $\text{Im}(f) = F$  (valable même si  $f$  n'est pas linéaire).
3. Si  $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  alors  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ .
4. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ ,  $f$  est bijective (isomorphisme) ssi  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$ .

**III.2 Applications linéaires et dimension****III.2.1 Proposition**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Soit  $H$  un supplémentaire de  $\ker(f)$  dans  $E$ .  $f_H : H \rightarrow \text{Im}(f)$  est un isomorphisme.

**Preuve.**

On a  $f|_H : \begin{cases} H & \rightarrow & \text{Im } f \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$  et  $H \oplus \ker(f) = E$ . Il s'agit bien d'une application linéaire de  $\mathcal{L}(H, \text{Im } f)$ .

—  $\ker f|_H = \{x \in H \mid f(x) = 0\} = H \cap \ker f = \{0_E\}$  car  $H$  et  $\ker f$  sont en somme directe.

— Soit  $y \in \text{Im } f$ . Alors il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ . Or on peut écrire  $x = x_H + x_K$  avec  $x_H \in H$  et  $x_K \in \ker f$ . Ainsi  $f(x) = f(x_H) + f(x_K) = f(x_H) + 0_E$  et donc  $y = f(x_H) = f|_H(x_H)$ . Donc  $\text{Im } f|_H = \text{Im } f$ .

Finalement  $f|_H$  est bien un isomorphisme linéaire. ■

**III.2.2 Théorème**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et supposons  $E$  de dimension finie. Alors  $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$ .

**III.2.3 Exemple**

Si  $E$  est de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  est une forme linéaire non nulle, alors  $\dim(\ker(f)) = n - 1$ .

**III.2.4 Corollaire**

Soit  $E, F$  des espaces de même dimension et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Dans le cas où  $f$  est un endomorphisme, les dimensions de  $E$  et  $F$  sont évidemment égales et ce résultat s'applique.

**III.2.5 Exemple (Polynômes interpolateur de Lagrange)**

Soient  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  des scalaires deux à deux distincts.

L'application  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \end{cases}$  est injective (compter les racines d'un polynôme du noyau, seul le

polynôme nul en possède autant) et donc bijective.

En conséquence, si on fixe  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$  (quelconques cette fois), il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  tel que  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket P(a_i) = y_i$ , ou encore par  $n + 1$  points d'abscisses 2 à 2 distinctes il passe une unique courbe polynomiale de degré  $n$  ou moins.

Pour déterminer  $P$ , on calcule les  $P_i$  tels que  $\varphi(P_i) = e_i$  le  $i$ ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Un raisonnement rapide sur les racines (2 à 2 distinctes) de  $P_i$  montre que  $P_i = \alpha_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$  et comme  $P_i(a_i) = 1$  on

trouve la valeur de  $\alpha_i$ .

Ensuite, la linéarité de  $\varphi$  montre que  $\varphi(\sum_{i=0}^n y_i P_i) = \sum_{i=0}^n y_i e_i$  et donc  $P = \sum_{i=0}^n y_i P_i$ .

**III.2.6 Corollaire**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est de dimension finie.

$$f \in GL(E) \iff \exists g \in \mathcal{L}(E) f \circ g = Id_E \iff \exists g \in \mathcal{L}(E) g \circ f = Id_E$$

**Remarque**

C'est le pendant du théorème qui énonce qu'une matrice est inversible ssi on trouve un inverse à gauche ou un inverse à droite.

**III.3 Espaces stables**

**III.3.1 Définition**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sous-espace de  $E$ . On dit que  $F$  est stable par  $f$  ssi  $f(F) \subset F$ .

**III.3.2 Exemple**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Montrer que  $F_\lambda = \ker(f - \lambda id_E)$  est stable par  $f$ .

**Restriction**

Si  $F$  est stable par  $f$  alors on peut définir  $f_F : \begin{cases} F & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$  la restriction de  $f$  à  $F$  (le détail important ici est l'espace d'arrivé qui est illégal si  $F$  n'est pas stable).

Alors  $f_F \in \mathcal{L}(F)$ .

### Familles génératrices

Soit  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ .  $F$  est stable par  $f$  ssi  $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_j) \in F$ . En effet  $f(F) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$ .

#### III.3.3 Exemple

Considérons l'application  $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + y + z \\ x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix}$ . On pose  $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, F = \text{Vect}(u, v)$  et  $G = \text{Vect}(w)$ .

Montrer que  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , que  $F, G$  sont stables par  $f$ , calculer  $\text{Mat}_{(u,v)}(f_F), \text{Mat}_{(v)}(f_G)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

#### III.3.4 Théorème

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$ ,  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$  que l'on complète en une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . On note  $n = \dim(E)$  et  $p = \dim(F)$

$F$  est stable par  $f$  ssi  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est de la forme  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où

- $A \in M_p(\mathbb{K})$  ( et on a alors  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f|_F)$ )
- $B \in M_{p, n-p}(\mathbb{K})$
- $C \in M_{n-p}(\mathbb{K})$
- $0$  représente la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{n-p, p}$

#### Preuve.

On note  $M = (m_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Supposons  $F$  stable par  $f$  et notons,  $\mathcal{B} = e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n$  (les  $p$  premiers sont dans  $F$ ). Pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $f(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i$ . Les derniers termes de cette somme sont nuls car  $e_j \in F$ , ainsi  $f(e_j) = \sum_{i=1}^p m_{i,j} e_i$ . Ceci prouve que les  $n - p$  dernières lignes de  $M$  sont nulles dans les  $p$  premières colonnes.

Réciproquement, si  $M$  est de la forme annoncée, alors  $f(e_j)$  n'a des coordonnées que sur  $e_1, \dots, e_p$  ie est dans  $F$ , et ce pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . ■

## IV Equation(s) d'un sous-espace

### IV.1 Hyperplans

#### IV.1.1 Définition

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace  $H$  de  $E$  est appelé hyperplan ssi  $H$  admet une droite comme supplémentaire. Cette définition est valable même en dimension infinie.

#### IV.1.2 Proposition

Les hyperplan de  $E$  de dimension  $n > 0$  sont exactement les sous-espaces de dimension  $n - 1$ .

#### IV.1.3 Exemple

Les droites du plan, les plans dans l'espace. Remarquer les équations cartésiennes similaires dans ces cas.

#### IV.1.4 Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $H$  un hyperplan de  $E$ .

Alors  $H$  est le noyau d'une forme linéaire non nulle  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  et si  $H = \ker(g)$  pour  $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  alors  $f$  et  $g$  sont proportionnelles.

#### Preuve.

Soit  $\mathbb{K}u$  une droite supplémentaire de  $H$  dans  $E$  (ie.  $u \notin H$ ). Pour  $x \in E$  on peut alors écrire  $x = x_H + \lambda_x u$

de manière unique. On pose  $f : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \lambda_x \end{cases}$ . On prouve très facilement (voir les projecteurs) que  $f$  est une forme linéaire, non nulle car  $f(u) = 1$ .

De plus, pour  $x \in E$ ,  $f(x) = 0 \iff \lambda_x = 0 \iff x \in H$ . Ainsi  $H = \ker(f)$ .

Supposons maintenant que  $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  vérifie  $\ker(g) = H$ . Alors  $g$  est une forme linéaire non nulle (sinon son noyau est  $E$ ) et on a avec les notations précédentes,  $g(x) = g(x_H) + \lambda_x g(u) = \lambda_x g(u) = g(u)f(x)$ . Ainsi  $g = \underbrace{g(u)}_{\in \mathbb{K}} \times f$ .

Exo : on peut en fait décrire  $g$  de la même manière que  $f$  ( $g : x \mapsto \mu_x$ ). Avec quel(s) vecteur(s) ? ■

**IV.1.5 Théorème**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n > 0$  et  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une base de  $E$ .

Pour un hyperplan  $H$  il existe  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$  non nul tel qu'une équation de  $H$  dans la base  $\mathcal{B}$  soit  $\alpha_1 x_1 +$

$\alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$  ce qui signifie que  $x \in E$  de coordonnées (dans  $\mathcal{B}$ )  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  appartient à  $H$  ssi  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ .

Toutes les équations de  $H$  (dans la base  $\mathcal{B}$ ) sont proportionnelles à celle-ci.

**Preuve.**

Posons  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  telle que  $H = \ker(f)$ . Alors  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in H \iff f(x) = 0 \iff f(e_1)x_1 + f(e_2)x_2 + \dots + f(e_n)x_n = 0$ . En notant  $a_i = f(e_i)$  il ne reste qu'à vérifier que ces scalaires sont non tous nuls. S'ils l'étaient,  $f$  serait l'application nulle car son image est engendrée par  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ .

on a bien trouvé une équation (à coefficients non tous nuls) de  $H$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Toutes les autres équations de  $H$  sont de la forme  $g(x) = 0$  où  $g$  est une forme linéaire, donc sont proportionnelles (l'application  $x \mapsto \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$  est linéaire pour toute famille  $(\beta_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  par composition). ■

**IV.1.6 Exemple**

Dans  $E = \mathbb{K}_n[X]$ , l'ensemble  $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$  est un hyperplan. En effet, un polynôme  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  est dans  $F$  ssi  $a_0 + \dots + a_n = 0$  (équation dont les inconnues sont les coordonnées dans la base canonique et les coefficients tous égaux à 1).

**IV.2 Sous-espace en dimension finie**

**Intersection d'hyperplans**

Soient  $H_1, \dots, H_p$  des hyperplans de  $E$  de dimension  $n \geq p$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . L'intersection  $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p$  est l'ensemble des solutions d'un système  $S$  à  $n$  inconnues (les coordonnées dans  $\mathcal{B}$ ) et  $p$  équations. Le rang de  $S$  est au maximum  $p$  donc l'ensemble des solutions (notre intersection) est de dimension au moins  $n - p$ .

Quel est le cas d'égalité pour les dimensions ?

**IV.2.1 Théorème**

Soit  $E$  de dimension  $n > 0$  et  $p \leq n$ .

1. l'intersection de  $p$  hyperplans de  $E$  est de dimension au moins  $n - p$ .
2. réciproquement, tout sous-espace de dimension  $p$  est l'intersection de  $n - p$  hyperplans (et possède donc un système d'équation à  $n - p$  équations et  $n$  inconnues dans une base fixée de  $E$ ).

**Preuve.**

Il nous reste à prouver le deuxième point.

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  de dimension  $p$ . Notons  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$  et complétons cette base en

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $x \in E$  et  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$ . Alors  $x \in F \iff x_{p+1} = 0$  et  $\dots$  et  $x_n = 0$ .

Si on note  $H_i : x_i = 0$  pour  $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$  des hyperplans décrits par leurs équations dans  $\mathcal{B}$ , alors  $F = \bigcap_{i=p+1}^n H_i$ .

On obtient bien  $n - p$  hyperplans ie.  $n - p$  équations. ■

### IV.2.2 Exemple

On savait qu'une droite dans l'espace est décrite par un système de deux équations, c'est à dire comme l'intersection de deux plans.

### IV.2.3 Exercice

Trouver un système d'équation de la droite  $D = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

## V Endomorphismes particuliers

### V.1 Homothéties

#### V.1.1 Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . **L'homothétie** de rapport  $\lambda$  est l'application linéaire  $\begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{cases}$ .

#### V.1.2 Exemple

Deux homothéties très importantes : l'application nulle et l'identité.

#### Matrice d'une homothétie

On considère  $E$  de dimension finie égale à  $n$  cette fois et on note  $h_\lambda$  l'homothétie de rapport  $\lambda$ . Alors dans toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$ .

Matriciellement, la seule matrice semblable à  $\lambda I_n$  est elle même, car pour  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ , on a  $P^{-1}\lambda I_n P = P^{-1}P\lambda I_n = \lambda I_n$ .

#### Commutation

Une homothétie commute avec tout endomorphisme.

### V.2 Projecteurs, symétries

#### V.2.1 Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient également  $F, G$  deux sous-espaces de  $E$ , supplémentaires dans  $E$ . Tout  $x \in E$  s'écrit donc de manière unique comme  $x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .

L'application  $p : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x_F \end{cases}$  est appelé projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  (ou de direction  $G$ ).

L'application  $s : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{cases}$  est appelé symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  (ou de direction  $G$ ).

#### Liens entre ces applications

- On a les liens important entre ces applications :  $s = 2p - Id$  et  $p = \frac{s+Id}{2}$ .
- Si  $p'$  et  $s'$  désignent les projection et symétrie sur  $G$  et de direction  $F$ , on a  $p+p' = Id, p \circ p' = 0 = p' \circ p, s+s' = 0, s \circ s' = s' \circ s = -Id$ .

#### V.2.2 Théorème

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient également  $F, G$  deux sous-espaces de  $E$ , supplémentaires dans  $E$

- Soit  $p$  le projecteur sur  $F$  de direction  $G$ . On a alors :

- $p \in \mathcal{L}(E)$
- $p^2 = p$
- $\ker p = G$
- $\text{Im } p = F = \ker(Id_E - p)$

- Réciproquement si  $f \in \mathcal{L}(E)$  vérifie  $f^2 = f$  alors  $f$  est le projecteur sur  $\text{Im}(f) = \ker(f - Id)$  dans la direction  $\ker(f)$  (et on a donc  $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ ).

**Preuve.**

1. Prouvons tout d'abord la linéarité.

Soient  $x, y \in E$  que l'on décompose en  $x = x_F + x_G$  et  $y = y_F + y_G$ . Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

Alors  $p(\alpha x + \beta y) = p((\alpha x_F + \beta y_F) + (\alpha x_G + \beta y_G)) = \alpha x_F + \beta y_F = \alpha p(x) + \beta p(y)$  et  $p$  est bien linéaire.

Evidemment,  $p^2(x) = p(x_F + 0_E) = x_F = p(x)$  et on a bien  $p^2 = p$ .

Ensuite, avec les mêmes notations,  $p(x) = 0_E$  ssi  $x_F = 0_E$  ssi  $x \in G$ . De plus,  $p(x) = x_F \in F$  et on a en fait prouvé  $\text{Im}(f) \subset F$ .

Si  $x \in F$ , alors  $p(x) = x \in \text{Im}(f)$  et donc  $F \subset \text{Im}(p)$  et finalement  $F = \text{Im}(p)$ .

Il reste à prouver que  $\text{Im}(p) = \ker(p - Id_E)$ . ON a déjà montré que tout  $x \in F$  vérifie  $p(x) - x = 0$  ie  $(p - Id_E)(x) = 0$  et donc  $F \subset \ker(p - Id_E)$ . Soit maintenant  $x \in \ker(p - Id_E)$  ie  $x$  vérifie  $p(x) = x$ . Ainsi  $x \in \text{Im}(p)$  et l'autre inclusion est prouvée.

2. — On a d'abord  $(f - Id) \circ f = 0$  donc  $\text{Im}(f) \subset \ker(f - Id)$ . L'autre inclusion est évidente (cf fin du point précédent).

— Montrons maintenant que  $\ker(f) \oplus \ker(f - Id) = E$ . Soit  $x \in E$ .

— Analyse : **Supposons** que  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in \ker(f)$  et  $x_2 \in \ker(f - Id)$ .

Alors  $f(x) = 0_E + f(x_2) = x_2$ . Ainsi  $x_2 = f(x)$  et donc  $x_1 = x - x_2 = x - f(x)$ .

— Synthèse : Réciproquement, posons  $x_1 = x - f(x)$  et  $x_2 = f(x)$ . Montrons que  $x = x_1 + x_2$  (trivial) et que  $x_1 \in \ker(f)$  et  $x_2 \in \ker(f - Id)$  (moins trivial).

Cependant,  $f(x_1) = f(x) - f^2(x) = 0_E$  et  $(f - Id)(x_2) = f(x_2) - x_2 = f^2(x) - f(x) = 0_E$  car  $f^2 = f$ .

Conclusion :  $E = \ker(f) + \ker(f - Id)$ . Le fait que la somme est directe provient directement de l'analyse (les seules valeurs possibles sont...) ou du fait que si  $x \in \ker(f) \cap \ker(f - Id)$  alors  $f(x) = 0_E$  et  $f(x) - x = 0_E$  donc  $x = 0_E$  et on a bien  $\ker(f) \cap \ker(f - Id) = \{0_E\}$ .

— Par définition d'un projecteur, et d'après notre analyse,  $f$  est le projecteur sur  $\ker(f - Id) = \text{Im}(f)$  dans la direction  $\ker(f)$ . ■

**V.2.3 Exemple**

Soit la matrice  $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  est un projecteur

dont on précisera les éléments caractéristiques.

Question 5/2 : au vu de la matrice  $A$ , que dire de plus de la projection ?

**Matrice dans une base adaptée**

1. On considère  $p$  le projecteur de  $\mathbb{R}^3$  sur un plan  $P$  parallèlement à une droite  $D$  non incluse dans  $P$ . On note  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  une base adaptée à  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ . Donner la matrice de  $p$  dans  $\mathcal{B}$ .

2. Même question dans le cas général  $E = F \oplus G$ .

**V.2.4 Exemple**

On considère l'application  $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto \frac{A+A^t}{2} \end{cases}$ . Il s'agit, d'après le point II.2.5 de la projection sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  parallèlement à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ .

**V.2.5 Théorème**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient également  $F, G$  deux sous-espaces de  $E$ , supplémentaires dans  $E$

1. Soit  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  dans la direction  $G$ . Alors :

—  $s \in GL(E)$  et  $s^2 = Id_E$  ie.  $s = s^{-1}$

—  $F = \ker(s - Id_E) = \{x \in E \mid s(x) = x\}$

—  $G = \ker(s + Id) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$

2. Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $f^2 = Id_E$  alors  $f$  est la symétrie par rapport à  $\ker(f - Id_E)$  parallèlement à  $\ker(f + Id_E)$  qui sont donc supplémentaires dans  $E$ .

**V.2.6 Exemple**

Dans  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  l'application  $s$  qui à une fonction  $f$  associe  $s(f) : x \mapsto f(-x)$  est une symétrie. C'est la symétrie par rapport aux fonctions paire parallèlement aux fonctions impaires.

### Matrice dans une base adaptée

Donner, avec les notations du théorème, la matrice de  $s$  dans une base adaptée à  $E = F \oplus G$ .

#### V.2.7 Exemple

Remarquons que la transposition est une symétrie. C'est même la symétrie associée au projecteur de l'exemple V.2.4

## V.3 Projection et espaces en somme directe

### V.3.1 Définition

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces de  $E$  vérifiant  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ . Pour  $x \in E$ , on pose  $x = x_1 + \dots + x_p$  l'unique décomposition en somme telle que  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket x_i \in F_i$ .

Le projeté du vecteur  $x$  sur  $F_j$  parallèlement à  $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p F_i$  est le vecteur  $x_j$ . Le projecteur associé est  $p_j : x \mapsto x_j$ .

### Remarque

Si la somme directe des  $F_i$  n'est pas égale à l'espace  $E$  global, on peut se ramener à la définition en considérant plutôt  $F = \sum_{i=1}^p F_i$  comme espace dans lequel on projette.

### V.3.2 Proposition

Avec les notations de la définition précédente

- $\forall (k, l) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 \quad k \neq l \Rightarrow p_k \circ p_l = 0$

- $\sum_{j=1}^p p_j = Id_E$ .

### En pratique

Pour déterminer ces projections, on procède comme dans le cas d'espaces supplémentaires :

- calcul de coordonnées dans une base adaptée si possible, et on regroupe par espace.
- analyse/synthèse s'il le faut.





# Chapitre 7

## Intégrations sur un intervalle quelconque

Dans ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I Intégrales convergentes

Le cadre d'étude change : on considère toujours des fonctions continues, plus seulement sur des segments mais des intervalles quelconques.

#### I.1 Intégrales impropres

##### I.1.1 Définition

Soient  $a < \boxed{b \leq +\infty}$  et  $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$  existe et est finie on la note  $\int_a^b f(t) dt$  et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

##### I.1.2 Exemple

Calculer l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt$ .

##### I.1.3 Définition

Soient  $\boxed{-\infty \leq a} < b$  et  $f \in \mathcal{C}(]a, b], \mathbb{R})$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt$  existe et est finie on la note  $\int_a^b f(t) dt$  et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

##### I.1.4 Exemple (A savoir refaire)

Montrons que  $\int_0^1 \ln(t) dt$  converge et donnons sa valeur.

—  $\ln \in \mathcal{C}(]0, 1], \mathbb{R})$  (ie. le "problème" est en 0).

— Soit  $x > 0$ .  $\int_x^1 \ln(t) dt = -1 - x \ln(x) + x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$

— Conclusion :  $\int_0^1 \ln(t) dt$  est une intégrale convergente et sa valeur est -1.

##### I.1.5 Définition-Proposition

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  (on peut avoir  $a = -\infty$  ou  $b = +\infty$ ). Soit  $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$ .

S'il existe un  $c \in ]a, b[$  tel que  $\int_a^c f$  et  $\int_c^b f$  sont des intégrales convergentes alors on dit que  $\int_a^b f$  converge.

Dans ce cas on a  $\forall c' \in ]a, b[$   $\int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$  et on note cette valeur  $\int_a^b f$ .

##### Preuve.

On a, par limite d'une somme (une intégrale convergente et une constante),  $\int_a^c f = \int_a^{c'} f + \int_{c'}^c f$ . De même  $\int_c^b f = \int_c^{c'} f + \int_{c'}^b f$ . Finalement, l'égalité demandée est vérifiée. ■

**Interprétation graphique**

On peut continuer à voir une intégrale impropre comme une aire, mais cette fois comme l'aire limite d'un partie non nécessairement bornée.

**Coin-culture**

L'intégrale suivante est d'importance fondamentale en probabilité :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}$ .

**Preuve.**

Voici une preuve en plusieurs étapes.

— Montrons que  $\forall x > -1 \ln(1+x) \leq x$  (avec égalité seulement en 0).

Remarquons d'abord que  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$ , ce qui nous permettra d'utiliser l'inégalité des accroissements finis. De plus sa dérivée est  $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x}$  qui est décroissante sur  $] -1, +\infty[$ .

Si  $x > 0$ , on a  $f'(x) \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq f'(0)$  ce qui donne  $\frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$  qui est CQFD. Si  $x < 0$ , on a  $f'(1) \leq \frac{f(0)-f(x)}{0-x} \leq f'(x)$  ou encore  $1 \leq \frac{-\ln(1+x)}{-x}$  ou encore  $-x \leq -\ln(1+x)$  car  $-x > 0$ .

— Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $t \in [0, \sqrt{n}]$ , on a alors  $\pm \frac{t^2}{n} \in ] -1, +\infty[$  et donc  $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$  et  $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}$ .

Ainsi,  $n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -t^2 \leq -n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)$ . En passant à l'exponentielle qui est croissante,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

— La relations qui précède est encore vraie pour  $t = \sqrt{n}$ , et en intégrant on obtient :

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt}_{I_1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt}_{I_2}$$

En posant  $t = \sqrt{n} \cos(u)$  dans  $I_1$  (possible d'après les valeurs prises par  $t$ ), on a  $dt = -\sqrt{n} \sin(u)du$  et donc  $I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sqrt{n} \sin^{2n+1}(u)du$ .

En posant  $u = \sqrt{n} \tan(u)$  dans  $I_2$  on obtient  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n} \cos^{2n-2}(u)du$  car  $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2} = \tan'$ .

— Si on note  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$  (par changement de variable  $\frac{\pi}{2} - t$ ), on a  $I_2 \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$  (car on intègre une fonction positive sur un segment plus petit) et donc

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$$

D'après l'étude des intégrales de Wallis,  $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$  et par encadrement  $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . ■

**Prolongement par continuité**

On se place dans le cas  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}$  (ce n'est pas  $+\infty$ ). Si on peut prolonger  $f$  par continuité en  $b$  (on note  $\tilde{f}$  le prolongement), alors l'intégrale  $\int_a^b f$  converge et sa valeur est la même que l'intégrale sur un segment de son prolongement.

Le résultat est encore vrai si c'est la borne inférieure qui est exclue, voire les deux si on peut prolonger à chaque borne.

**Preuve.**

Soit  $F_1 : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  la primitive de  $f$  sur  $[a, b[$  qui s'annule en  $a$  et  $F_2 : x \mapsto \int_a^x \tilde{f}(t)dt$  la primitive de  $\tilde{f}$  sur  $[a, b]$  qui s'annule en  $a$ , alors  $\forall x \in [a, b[ F_1(x) = F_2(x)$  et  $F_2$  est continue sur  $[a, b]$ .  $F_2$  est donc le prolongement par continuité de  $F_1$  et on a bien  $F_1(x) \underset{x \rightarrow b}{\rightarrow} F_2(b) = \int_a^b \tilde{f}$ . ■

**I.1.6 Exemple**

Montrer que  $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$  converge. Posons  $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ .

- Etude en 0. On a  $t - 1 \xrightarrow{0} -1$  et  $\ln(t) \xrightarrow{0} -\infty$  donc  $f(t) \xrightarrow{0} 0$  et on peut prolonger  $f$  par continuité en 0.
- Etude en 1. On a  $\ln(t) \xrightarrow{1} t - 1$  car  $\ln(1 + u) \sim u$ . Ainsi  $f(t) \xrightarrow{1} 1$  et on peut prolonger  $f$  par continuité en 1.

Finalement,  $\int_0^1 f$  converge.

**I.2 Fonctions positives**

Dans cette partie, nous ne considérons que des fonctions positives. On ne considère pas les cas où il y a des “compensations” d’aire.

**I.2.1 Proposition**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$  converge ssi  $\alpha > 0$ .

Dans le cas de convergence,  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$ .

**Preuve.**

Intégrer jusqu’à  $x > 0$  et un simple calcul de primitive conclut. ■

**I.2.2 Théorème ( )**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge ssi  $\alpha > 1$ .
2.  $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge ssi  $\alpha < 1$ .

**Preuve.**

1. Soit  $x > 1$ .  $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = [\frac{t^{-\alpha+1}}{(-\alpha+1)}]_1^x$  si  $\alpha \neq 1$  et  $[\ln(t)]_1^x$  si  $\alpha = 1$ .

Dans le cas  $\alpha = 1$  on a donc une intégrale divergente.

Pour  $\alpha \neq 1$ ,  $x^{-\alpha+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$ . On retrouve bien le résultat annoncé. Remarque : si  $\alpha < 1$

alors  $\frac{1}{t} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^\alpha})$  et le théorème de comparaison nous assure de la divergence de l’intégrale de Riemann concernée.

2. Soit  $x \in ]0, 1[$ . Le même calcul de primitive vaut encore. Comme  $\ln(x) \xrightarrow{0} -\infty$ ,  $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$  diverge et le théorème de comparaison nous assure que  $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$  diverge dès que  $\alpha \geq 1$  (en 0, les comparaisons de puissances sont inverses de celles en  $+\infty$ ).

Cette fois,  $x^{-\alpha+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$  et on retrouve le résultat de convergence. ■

**I.2.3 Théorème**

Soient  $f, g \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$  des fonctions **positives**.

1. Si  $f \leq g$  au voisinage de  $b$  et  $\int_a^b g$  converge alors  $\int_a^b f$  converge.
2. Si  $f = O_b(g)$  et  $\int_a^b g$  converge alors  $\int_a^b f$  converge.

3. Si  $f = o_b(g)$  et  $\int_a^b g$  converge alors  $\int_a^b f$  converge.

4. Si  $f \sim_b g$  alors  $\int_a^b f$  et  $\int_a^b g$  sont de même nature.

Le résultat vaut encore pour des fonctions continues et positives sur  $]a, b]$ , à condition de les comparer en  $a...$

### Preuve.

1. Plaçons nous sur un intervalle  $[c, b[$  où  $f \leq g$ . Les intégrales  $\int_c^b f$  et  $\int_c^b g$  ont la même nature.

Pour  $x \in [c, b[$  on a, par croissance de l'intégrale sur un segment (on intègre "dans le bon sens"),  $\int_c^x f \leq \int_c^x g$ .

Or  $x \mapsto \int_c^x g$  est croissante et possède une limite finie, donc est toujours inférieure à cette limite.

Ainsi  $x \mapsto \int_c^x f$  est croissante ( $f \geq 0$ ) et majorée donc possède une limite finie en  $b$  (la borne supérieure de son intervalle de définition). Ainsi  $\int_c^b f$  converge (et est  $\leq \int_c^b g$ ) et donc  $\int_a^b f$  converge.

2. Dans le cas où  $f = O_b(g)$  on a  $f \leq Mg$  au voisinage de  $b$  pour un  $M \in \mathbb{R}^+$  fixé.

Par produit d'une limite par une constante,  $\int_a^b Mg(t)dt$  converge et par la point précédent,  $\int_a^b f$  converge.

3. On a dans ce cas  $f = O_b(g)$

4. On a dans ce cas  $f = O_b(g)$  et  $g = O_b(f)$ . ■

### Négligeabilité

Si on a  $f = o_b(g)$  et  $\int_a^b g$  converge alors  $\int_a^b f$  converge. Dans la pratique, on utilisera très souvent ce fait.

Exemple :  $\frac{1}{t^t} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$  donc  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^t} dt$  converge par comparaison de fonctions positives.

### Divergence

On peut tout à fait appliquer les contraposées des points 1 et 2 pour prouver la divergence d'une intégrale d'une fonction positive. Par exemple, si  $f = o_b(g)$  et  $\int_a^b f$  diverge, alors  $\int_a^b g$  diverge (raisonnement par l'absurde).

$t^\alpha f(t)$

1. En 0 Pour la convergence en 0, si  $t^{\frac{1}{2}} f(t) \rightarrow 0$  ou plus généralement  $t^{1-\varepsilon} f(t) \rightarrow 0$  pour un  $\varepsilon > 0$  fixé alors l'intégrale de  $f$  converge en 0 (si  $f$  est positive...)

2. En  $+\infty$  si  $t^2 f(t) \rightarrow 0$  ou plus généralement  $t^{1+\varepsilon} f(t) \rightarrow 0$  alors l'intégrale de  $f$  converge en  $+\infty$ .

### Application à la preuve de divergence

On suppose toujours  $f$  positive.

En  $a = 0$  comme en  $a = +\infty$ , si on a  $tf(t) \rightarrow +\infty$  on peut conclure à la divergence de l'intégrale de  $f$ . Par

exemple  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt$  diverge.

#### I.2.4 Exemple

Discuter suivant la valeur de  $\beta \in \mathbb{R}$  la convergence de  $\int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt$ .

On pose  $f_\beta : t \mapsto t^{\beta-1} e^{-t}$ . Alors  $f_\beta(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$  car  $t^2 f_\beta(t) \rightarrow 0$ . Ainsi l'intégrale converge en  $+\infty$  par comparaison de fonctions positives.

En 0, on a  $f_\beta(t) \sim t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ . L'intégrale converge ssi  $\alpha > 0$  d'après le théorème précédent et par comparaison de fonctions positives.

**I.2.5 Exemple**

Montrer (enfin!) que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge.

**Fonctions négatives**

Toute cette partie s'applique en remplaçant "positive" par "négative". L'important ici est que  $f$  ne change pas de signe.

**I.2.6 Proposition**

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ . Si on a :

- $f$  est positive,
  - $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  converge,
  - $f$  possède une limite  $\ell$  en  $+\infty$
- alors  $\ell = 0$ .

**Preuve.**

Supposons que  $\ell$  existe. Si on avait  $\ell > 0$ , alors pour un certain  $A > 0$  on aurait  $\forall t \geq A \ f(t) \geq \frac{\ell}{2}$  (imposer  $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$  dans le cas d'une limite finie, réfléchir au cas  $\ell = +\infty$ ). Mais alors pour  $x \geq A$  on a  $\int_A^x f(t)dt \geq (x-A)\frac{\ell}{2}$ .

Or  $\int_A^x f \leq \int_a^{+\infty} f$  car  $f$  est positive.  
 Contradiction. ■

**I.3 Lien avec les séries**

**I.3.1 Théorème**

Soit  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $n_0 \in \mathbb{N}$ ) une fonction **continue, positive et décroissante**.

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt \text{ et } \sum_{n \geq n_0} f(n) \text{ ont la même nature}$$

**Preuve.**

Pour un  $N > n_0$  on a, (faire un schéma. La preuve est la décroissance de  $f$  et la croissance de l'intégrale),

$$\int_{n_0+1}^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=n_0}^N f(n) \leq \int_{n_0}^N f(t)dt.$$

Ainsi la suite des sommes partielle est majorée ssi  $x \mapsto \int_{n_0}^x f(t)dt$  est majorée (il suffit de majorer les valeurs aux entiers car cette fonction est croissante). ■

**I.3.2 Exemple**

On prouve de cette manière la convergence et la divergence des séries de Riemann.

**Application aux séries divergentes**

On souhaite donner un équivalent de  $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$ .

Or, pour  $k \geq 2$ ,  $\int_{k-1}^k \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt$  car  $\ln$  est croissante sur  $[k-1, k]$  et sur  $[k, k+1]$ .

En sommant de 2 à  $n$  on obtient  $\int_1^n \ln(t)dt \leq \ln(n!) \leq \int_2^{n+1} \ln(t)dt$  ie  $n \ln(n) - n + 1 \leq n! \leq (n+1) \ln(n+1) - (n+1) - 2 \ln(2) + 2$ .

On en tire classiquement  $\ln(n!) = n \ln(n) - n + o_{+\infty}(n)$ .

## Restes d'une série convergente

On cherche un équivalent de  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ . Avec  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  on a (cf DM)  $S_n + R_n = \frac{\pi^2}{6}$  et donc  $|S_n - \frac{\pi^2}{6}| = |R_n|$  où  $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .  $R_n$  représente en fait la qualité de l'approximation de  $\frac{\pi^2}{6}$  par la somme finie  $S_n$ .

Pour  $k > n$  (on fixe  $n \geq 1$  pour l'instant), on a classiquement  $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$  et en sommant de  $n+1$  à  $+\infty$ ,  $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ .

Or  $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n}$  et donc  $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  (multiplier l'encadrement par  $n$  + théorème d'encadrement).

## II Intégrabilité

### II.1 Fonctions intégrables

#### II.1.1 Définition

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue. On dit que  $f$  est **intégrable** sur  $I$  ssi  $\int_I |f|$  converge.

#### II.1.2 Exemple

Etudier l'intégrabilité sur  $]0, +\infty[$  de  $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ .

#### Remarque

Pour les fonction positives ou négatives, l'intégrabilité et le fait que l'intégrale converge est équivalent. C'est faux pour des fonctions qui changent de signe ou des fonctions à valeurs complexes.

#### II.1.3 Théorème

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . SI  $f$  est intégrable sur  $I$  ALORS  $\int_I f$  converge.

#### Preuve.

— Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Notons  $f_+ : x \mapsto \max(f(x), 0)$  et  $f_- : x \mapsto \min(f(x), 0)$  les fonctions qui valent respectivement  $f(x)$  ou 0 suivant que  $f(x)$  est positif ou négatif.

Alors  $f = f_+ + f_-$  et  $|f| = f_+ - f_-$ . Si on suppose que  $f$  est intégrable sur  $I$ , vu que  $f_+ \leq |f|$  et  $-f_- \leq |f|$ , les intégrales de  $f_+$  et  $-f_-$  convergent et par combinaison linéaire l'intégrale de  $f_+ - (-f_-) = f$  converge.

— Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Notons  $f = u + iv$  la forme algébrique de  $f$ . Alors  $|u| \leq |f|$  et  $|v| \leq |f|$ . Par comparaison de fonctions à valeurs positives,  $u, v$  sont d'intégrales convergentes sur  $I$  et donc  $f = u + iv$  aussi. ■

#### Contre-exemple

(admis pour l'instant),  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$  converge, mais la fonction n'est pas intégrable.

#### METHODE

Pour montrer l'intégrabilité de  $f$  sur  $I$  :

1. Rechercher un éventuel prolongement par continuité.
2. rechercher un équivalent de  $|f|$  qui soit intégrable ou prouver que  $|f|$  est négligeable devant une fonction intégrable.
3. majorer  $|f|$  (au voisinage du point à problème s'il le faut) par une fonction intégrable.

#### II.1.4 Exemple

1. Etudier l'intégrabilité sur  $]0, 1]$  de  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ .
2. Etudier l'intégrabilité sur  $[1, +\infty[$  de  $t \mapsto \ln(1 + \frac{1}{t}) - \frac{1}{t}$ .
3. Etudier l'intégrabilité sur  $[1, +\infty[$  de  $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ .

## II.2 Propriétés des fonctions intégrables

### Notation

L'ensemble des fonctions continues et intégrables définies sur l'intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est noté  $L^1(I, \mathbb{K})$ .

#### II.2.1 Proposition

$L^1(I, \mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

#### Preuve.

1. La fonction nulle est clairement intégrable sur  $I$  et son intégrale vaut 0.

2. Soient  $f, g \in L^1(I, \mathbb{K})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

Montrons que  $\lambda f + \mu g$  est encore intégrable. Comme  $|\lambda f + \mu g| \leq |\lambda||f| + |\mu||g|$  on peut se ramener au cas où  $f, g$  sont des fonctions à valeurs réelles et positives (par comparaison de fonctions positives).

Supposons donc que  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  sont intégrables (le raisonnement est similaire en  $a$ ). On a, pour  $x \in [a, b]$ ,  $\int_a^x (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^x f + \mu \int_a^x g$  qui converge bien quand  $x \rightarrow b^-$  par combinaison linéaire de limites finies. ■

#### II.2.2 Théorème

1. Soit  $f \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$  une fonction continue positive et intégrable sur  $I$ . Si  $\int_I f = 0$  alors  $\forall x \in I f(x) = 0$ .
2. Soit  $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ . Si  $\int_I |f| = 0$  alors  $\forall x \in I f(x) = 0$ .

#### Preuve.

Pour prouver le premier point, remarquons que si  $x \in I$  alors il existe un segment  $[a, b] \subset I$  tel que  $x \in [a, b]$ .

De plus, comme  $f$  est positive,  $0 \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_I f = 0$

Or ce théorème est vrai quand  $I$  est un segment. Pour  $x \in I$ , il suffit d'appliquer le cours de 1ère année pour prouver que  $f$  est nulle sur un segment  $[a, b]$  qui contient  $x$  et donc  $f(x) = 0$ . ■

#### II.2.3 Exemple

On pose, pour  $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $\varphi(f, g) = \int_0^1 fg$ . Montrer que  $\varphi(f, f) \geq 0$  et  $\varphi(f, f) = 0$  ssi la fonction  $f$  est la fonction nulle.

Exo : montrer en plus que  $\varphi$  est symétrique ( $\varphi(f, g) = \varphi(g, f)$ ) et bilinéaire.

#### II.2.4 Proposition

Si  $f \in L^1(I, \mathbb{K})$  est bornée en module par  $M \in \mathbb{R}^+$  et  $g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$  alors  $fg \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$  et  $\left| \int_I fg \right| \leq M \int_I |g|$ .

#### Preuve.

Notons  $a$  et  $b$  les bornes de  $I$ ,  $a < b$ . On a d'abord  $|fg| \leq M|g|$  donc  $|fg| = O_a(|g|)$  et  $|fg| = O_b(|g|)$  donc  $fg$  est intégrable sur  $I$  par comparaison de fonctions positives.

De plus, pour  $c, d \in I$ , avec  $a < c < d < b$ ,  $\left| \int_c^d fg \right| \leq M \int_c^d |g|$ . Faisons tendre  $c$  vers  $a$  (la fonction  $|\cdot|$  est

continue sur  $\mathbb{R}$ ), on obtient  $\left| \int_a^d fg \right| \leq M \int_a^d |g|$  par passage à la limite des inégalités larges.

On procède de même en  $b$ . ■

**ATTENTION**

L'hypothèse “ $f$  est bornée” n'est pas superflue. Dans le cas général un produit de fonctions intégrables n'est pas intégrable. Prendre  $f = g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  sur  $]0, 1]$ .

**II.2.5 Exemple**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-n^2(1+t^2))}{1+t^2} dt$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  si elle existe.

Remarquons que pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé on a  $\forall t \in \mathbb{R}^+ \exp(-n^2(1+t^2)) \leq e^{-n^2}$ . Ainsi  $0 \leq u_n \leq e^{-n^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$  et  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  par encadrement.

**III Outils de calcul****III.1 Changement de variable****III.1.1 Théorème**

Soient  $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$  et  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[$  une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante.

$\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$  sont de même nature et égales quand elles convergent.

**Preuve.**

Soient  $c, d \in ]\alpha, \beta[$ . On a  $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t) dt$  et  $\int_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u) du$  avec  $c \rightarrow \alpha \iff \varphi(c) \rightarrow a$ .

Ainsi les intégrales convergent simultanément en  $a$  et  $\alpha$ . ■

**Cas d'un changement décroissant**

Si  $\varphi$  est supposée décroissante, on a alors  $\int_a^b f(t) dt = \int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u) du$

**III.1.2 Exemple**

Etudier la convergence et “calculer”  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ .

En effectuant le changement  $t = u^2$  (bijectif sur  $\mathbb{R}_+^*$ ) donc  $dt = 2udu$  on obtient  $2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} = \sqrt{\pi}$ .

**III.1.3 Exemple**

Calculer la valeur de  $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$

Posons  $t = u^2$  et donc  $dt = 2udu$ . Alors  $I = \int_0^1 \frac{2u}{u\sqrt{1-u^2}} du = 2[\arcsin(u)]_0^1 = \pi$ .

**III.2 Intégration par parties****III.2.1 Théorème**

Soient  $u, v : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x)$  existe et est finie alors  $\int_a^b u'v$  et  $\int_a^b uv'$  sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

où on a noté  $[uv]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$ .

**Preuve.**

Immédiat d'après le cours de sup, en passant par des intégrales sur  $[a, x]$ . ■



**Remarque**

On peut étendre ce théorème à  $]a, b]$  et même à  $]a, b[$  (dans ce cas le crochet est la différence de deux limites).

**En pratique**

On reviendra toujours à une intégrale sur un segment  $[a, x]$  pour effectuer une intégration par parties puis on fait tendre  $x$  vers  $b$ . En effet, on ne connaît pas a priori la fonction  $u$  ni la limite de  $uv$ .

**III.2.2 Exemple (Intégrale de Dirichlet)**

Montrons que l'intégrale  $\int_0^A \frac{\sin(t)}{t} dt$  converge.

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $A > \varepsilon$ . Les fonctions en jeu étant  $\mathcal{C}^1$ , on a

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[ (1 - \cos(t)) \times \frac{1}{t} \right]_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

La limite du crochet quand  $t \rightarrow 0$  est 0 et également quand  $t \rightarrow +\infty$ .

De plus,  $\forall t > 0 \left| \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$  donc l'intégrale de droite converge quand  $A \rightarrow +\infty$ . En 0, on a un prolongement par continuité dans les deux intégrales.

Finalement,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  converge et on a même  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$

**III.2.3 Exemple**

Calculer  $\int_0^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{t^2}) dt$ .

**Contre-exemple**

$t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$  n'est pas intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

Ceci montre que dans une IPP, les deux intégrales sont de même nature, mais l'intégrabilité (en valeur absolue donc) de l'une ne présage rien de l'intégrabilité de l'autre...

**III.2.4 Exemple**

Reprenons I.2.4. On pose, pour  $\beta > 0$ ,  $\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt$ . Donnons un lien entre  $\Gamma(\beta + 1)$  et  $\Gamma(\beta)$

On a, pour  $a > 0$  et  $b > a$ ,  $\int_a^b t^{\beta} e^{-t} dt = [-t^{\beta} e^{-t}]_a^b + \int_a^b \beta t^{\beta-1} e^{-t} dt$ . Comme le crochet tend vers 0 en 0 et  $+\infty$  ( $\beta > 0$ ),  $\Gamma(\beta + 1) = \beta \Gamma(\beta)$ .

De plus,  $\Gamma(1) = 1$  et par récurrence immédiate,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Gamma(n) = (n - 1)!$ .



# Chapitre 8

## Réduction

### Motivation

#### Matrices diagonales

Les produits et puissances de matrices sont beaucoup plus aisés sur les matrices diagonales.

#### Endomorphismes

Nous avons constaté que certains endomorphismes ont une matrice diagonale pour un bon choix de base  $\mathcal{B}$ .

#### Traduction sur la base

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  une base de  $E$ . On suppose que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Traduisons cette hypothèse :  $f(u) = 2u, f(v) = -v$  et  $f(w) = 3w$ .

#### Noyaux

Poursuivons notre analyse de la situation précédente.

On a  $u$  qui vérifie  $f(u) - 2(u) = 0_E$  ie  $(f - 2Id_E)(u) = 0_E$ . Or  $u$  fait partie d'une famille libre donc est non nul. Ainsi  $\ker(f - 2Id_E) \neq \{0_E\}$ , ou encore l'endomorphisme  $f - 2Id_E$  n'est pas bijectif.

De même  $f + Id_E$  et  $f - 3Id_E$  ne sont pas bijectifs.

## I Elements propres

### I.1 Valeurs propres

#### I.1.1 Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  ssi il existe un  $x \in E$  **non nul** tel que  $f(x) = \lambda x$ . Un tel  $x$  **non nul** est appelé un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

L'ensemble des valeurs propres de  $f$  est appelé le spectre de  $f$  et noté  $Sp(f)$ .

#### I.1.2 Exemple

On prend  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $D : f \mapsto f' \in \mathcal{L}(E)$ . Trouvons les valeurs propres de  $D$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On se demande s'il existe une fonction  $f$  qui n'est pas la fonction nulle telle que  $D(f) = \lambda f$  ou encore  $f' = \lambda f$ .

La réponse est oui, par exemple  $t \mapsto e^{\lambda t}$ . On connaît même toutes les solutions :  $t \mapsto Ke^{\lambda t}$  où  $K \in \mathbb{R}^*$ .

Conclusion : tout réel est valeur propre de  $D$  ou encore  $Sp(D) = \mathbb{R}$

#### I.1.3 Exemple

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  l'endomorphisme canoniquement associé.

Trouver les valeurs propres de  $f$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche s'il y a une solution non nulle  $X \in \mathbb{R}^2$  à l'équation  $f(X) = \lambda X$  ie  $AX = \lambda X$ . Posons  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} 2x + y = \lambda x \\ x + 2y = \lambda x \end{cases} \iff \begin{cases} (2 - \lambda)x + y = 0 \\ x + (2 - \lambda)y = 0 \end{cases}.$$

Un système linéaire homogène possède une solution non nulle ssi sa matrice n'est pas inversible. Ainsi  $\lambda$  est une valeur propre ssi  $\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$  ssi  $\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 3 - \lambda & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$  ssi  $(3 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$  ssi  $(3 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$ .

Finalement, les valeurs propres de  $f$  sont 1 et 3,  $Sp(f) = \{1, 3\}$

### Vecteurs propres

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $E$ . Pour  $x \in E$  on a  $f(x) = \lambda x \iff f(x) - \lambda x = 0_E \iff x \in \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f)$ .

## I.2 Espaces propres

### I.2.1 Définition

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $E$ . L'espace propre associée à  $\lambda$  est l'espace  $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f) \neq \{0_E\}$ .

Il s'agit de l'ensemble composé du vecteur nul et de tous les vecteurs propres associés à  $\lambda$ . On le note parfois aussi  $E_\lambda$ .

### Noyau

$f$  est injective ssi 0 n'est pas valeur propre de  $f$ . De manière plus générale,  $\lambda$  est valeur propre de  $f$  ssi  $f - \lambda Id_E$  n'est pas injective.

### I.2.2 Exemple

On reprend l'exemple I.1.3. Calculons  $E_1(f)$  et  $E_3(f)$ .

D'après notre analyse,  $X \in E_1(f) \iff AX = X$ . On trouve le système  $x + y = 0$  dont l'ensemble des solutions est  $\text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi  $E_1(f) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On résout de même  $AX = 3X$ . On obtient le système  $-x + y = 0$ . Ainsi  $E_3(f) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Remarquons que  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  (famille libre de 2 vecteurs. Elle est en plus orthogonale et indirecte). De plus,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

### I.2.3 Théorème

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres 2 à 2 distinctes de  $f$ . Pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on pose  $v_i$  un vecteur propre associé à  $\lambda_i$  (il est donc non nul).

La famille  $(v_1, \dots, v_p)$  est libre.

#### Preuve.

— Le cas  $p = 1$  est trivial (une famille de 1 vecteur est libre ssi le vecteur est non nul)

— Supposons le théorème vrai pour  $p$  valeurs propres distinctes.

Prenons  $p + 1$  vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes. Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1} \in \mathbb{K}$  tels que

$$\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i v_i = 0_E \tag{8.1}$$

En composant par  $f$  on obtient

$$\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i \lambda_i v_i = 0_E \tag{8.2}$$

En calculant (8.1) -  $\lambda_{p+1}$ (8.2) on obtient  $\sum_{i=1}^p \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{p+1}) v_i = 0_E$ .

Or, par hypothèse de récurrence, la famille  $(v_1, \dots, v_p)$  est libre. Ainsi pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on a  $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{p+1}) = 0$ . Comme  $\lambda_i \neq \lambda_{p+1}$ , on a  $\alpha_i = 0$ .

Il reste à voir que  $\alpha_{p+1}v_{p+1} = 0_E$  avec  $v_{p+1} \neq 0_E$  (la moindre des choses pour un vecteur propre!). Finalement, la famille  $(v_1, \dots, v_{p+1})$  est libre.

- Par récurrence, pour tout  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $p$  vecteurs propres associés à  $p$  valeurs propres distinctes deux à deux forment une famille libre. ■

### I.2.4 Exemple

La famille  $(t \mapsto e^{\lambda t})_{\lambda \in \mathbb{R}}$  est libre car toute sous famille finie est libre.

### I.2.5 Exercice

Montrer que  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est libre.

### En dimension finie

Si  $\dim(E) = n$ , un endomorphisme de  $E$  ne peut pas avoir plus de  $n$  valeurs propres.

### I.2.6 Théorème

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres 2 à 2 distinctes de  $f$ .

La somme  $\sum_{i=1}^k E_{\lambda_i}(f)$  est directe.

#### Preuve.

Il s'agit de combiner le théorème précédent avec la caractérisation des sommes directes présentes dans le chapitre concerné. ■

### I.2.7 Exemple

Soit  $F$  un plan de  $\mathbb{R}^3$  et  $D$  une droite non contenue dans  $F$ . Alors  $F \oplus D = \mathbb{R}^3$ .

Soit  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $D$ . On a  $F = \text{Im}(p) = \ker(p - Id) = E_1$  et  $G = \ker(p) = E_0$  et on a bien  $E_1 \oplus E_0 = E_1 + E_0$ .

## I.3 Stabilité (★)

### Droites stables

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Supposons qu'on ait  $f(D) \subset D$  pour une droite  $D$  ie. que la droite  $D$  est stable par  $f$ .

Notons  $D = \text{Vect}(u)$  pour un  $u \neq 0_E$  (qui dirige  $D$ ). Alors  $f(u) \in D$  donc  $f(u) = \lambda u$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Ainsi  $u$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . On a même  $D \subset E_\lambda(f)$ .

### I.3.1 Proposition

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $f$ . Alors  $E_\lambda(f)$  est stable par  $f$ .

#### Preuve.

Soit  $x \in E_\lambda(f)$ . Alors  $f(x) = \lambda x$  par définition et donc  $f(x) \in E_\lambda(f)$  (stabilité par produit par un scalaire). ■

### Endomorphisme induit

Dans le cadre de la proposition, on note  $g : \begin{cases} E_\lambda(f) & \rightarrow & E_\lambda(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ . La restriction de l'ensemble d'arrivé a du sens d'après la proposition précédente.

Pour tout  $x \in E_\lambda(f)$  on a  $g(x) = f(x) = \lambda x$ . Ainsi  $g = \lambda Id_{E_\lambda(f)}$ .

En résumé : la restriction d'une application linéaire à un espace propre est une homothétie.

Si  $E$  est de dimension finie, on peut trouver  $F$  un supplémentaire de  $E_\lambda$  et la matrice de  $f$  est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda I_p & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix}$$

**I.3.2 Proposition**

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ .

1.  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont stables par  $g$ .
2. Tout espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .

Evidemment, on peut échanger les rôles de  $f$  et  $g$  dans ces résultats.

**Preuve.**

1. Soit  $x \in \ker(f)$ . Montrons que  $g(x) \in \ker(f)$ . Or  $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$ . Donc  $g(x) \in \ker(f)$ .  
Soit  $y \in \text{Im}(f)$ . Notons  $y = f(x)$ . Alors  $g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \text{Im}(f)$ .
2. Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $g \circ (f - \lambda Id_E) = (f - \lambda Id_E) \circ g$  donc  $\ker(f - \lambda Id_E)$  est stable par  $g$  d'après le point précédent.

■

**Droites propres**

Toujours dans le cadre  $f \circ g = g \circ f$ , tout droite propre de  $f$  est aussi une droite propre pour  $g$ .

**II En dimension finie**

Dans toute la suite du chapitre,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

**II.1 Extension aux matrices****II.1.1 Définition**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les valeurs propres et vecteurs propres de  $A$  sont les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ ,  $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \rightarrow \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto AX \end{cases}$ .

On note  $Sp(A) = Sp(f_A)$  et les espaces propres sont notés  $E_\lambda(A)$ .

**Traduction**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in Sp(A)$ .

1.  $X \in \mathbb{K}^n$  est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$  ssi  $X \neq 0$  et  $AX = \lambda X$ .
2.  $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \ker(\lambda I_n - A) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = \lambda X\}$

**II.1.2 Exemple**

Vérifier que 0 est une valeur propre de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$  et calculer  $E_0(A)$ .

**II.2 Polynôme caractéristique****II.2.1 Définition-Proposition**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est le polynôme  $\chi_A$  associée à la fonction  $\chi_A : \begin{cases} \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \det(xI_n - A) \end{cases}$ .

$\chi_A$  est un polynôme unitaire (son coefficient dominant est 1) de degré  $n$ .

**Preuve.**

On doit prouver que  $x \mapsto \det(xI_n - A)$  est polynomiale de degré  $n$  et unitaire. Notons  $E_1, \dots, E_n$  les colonnes de  $I_n$

Pour  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $P_p$  la propriété : pour  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$ ,  $f_p : x \mapsto \det(xE_1 - C_1, \dots, xE_p - C_p, -C_{p+1}, \dots, -C_n)$  est une fonction polynomiale de degré au plus  $p$  et le coefficient de  $x^p$  est  $\det(E_1, \dots, E_p, -C_{p+1}, \dots, -C_n)$ .

Pour nos calculs, fixons  $x \in \mathbb{K}$

- $f_1(x) = \det(xE_1 - C_1, -C_2, \dots, -C_n) = x \det(E_1, -C_2, \dots, -C_n) + \det(-A)$  qui est bien degré au plus 1 et le coefficient de  $x^1$  est  $\det(E_1, -C_2, \dots, -C_n)$ .

— Supposons  $P_p$  vérifiée pour un  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Alors

$$f_{p+1}(x) = x \underbrace{\det(xE_1 - C_1, \dots, xE_p - C_p, E_{p+1}, -C_{p+2}, \dots, -C_n)}_{g(x)} + \underbrace{\det(xE_1 - C_1, \dots, xE_p - C_p, -C_{p+1}, \dots, -C_n)}_{h(x)}.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à chacun des deux déterminants (avec deux familles de colonnes différentes) :  $g$  et  $h$  sont polynomiales de degré au plus  $p$  donc  $f_{p+1}$  est de degré au plus  $p+1$  et le coefficient de  $x^{p+1}$  est le coefficient de  $x^p$  dans  $g(x)$ , ie  $\det(E_1, \dots, E_p, E_{p+1}, -C_{p+2}, \dots, -C_n)$  (toujours par hypothèse de récurrence).

— Par récurrence,  $P_p$  est vraie pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

En appliquant le résultat précédent aux colonnes de  $A$ , on trouve que  $\chi_A$  est polynomiale de degré au plus  $n$  et le coefficient de  $x^n$  est  $\det(E_1, \dots, E_n) = 1$ . ■

### II.2.2 Exemple

Calculer sous forme factorisée le polynôme caractéristique de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda & -1 \\ \lambda-1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ . On a sommé toutes les colonnes dans  $C_1$ .

$$\text{Ainsi } \chi_A(\lambda) = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

### II.2.3 Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Le coefficient constante de  $\chi_A$  est  $(-1)^n \det(A)$  et le coefficient de  $X^{n-1}$  est  $-\text{tr}(A)$ . Ce résultat est également valable pour les endomorphismes.

#### Preuve.

On a en effet  $\chi_A(0) = \det(0I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$  qui est bien le coefficient constant.

Pour la trace, voir la fin du chapitre. ■

### II.2.4 Exemple

Si  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  alors  $\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$ .

### Matrices semblables

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices semblables. Posons  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = P^{-1}BP$ . Soit également  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors  $\lambda I_n - A = \lambda P^{-1}P - P^{-1}BP = P^{-1}(\lambda I_n - A)P$ . Ainsi  $\lambda I_n - A$  et  $\lambda I_n - B$  sont semblables et ont donc le même déterminant, ie  $\chi_A = \chi_B$ .

### II.2.5 Définition

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Le polynôme caractéristique  $\chi_f$  de  $f$  est le polynôme associé à l'application  $x \mapsto \det(xf - Id_E)$ . C'est un polynôme unitaire de degré  $n$ .

Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans une base  $\mathcal{B}$  quelconque de  $E$  alors  $\chi_f = \chi_A$ .

### II.2.6 Exemple

On considère  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto P + P' \end{cases}$ . Calculer  $\chi_f$ . On trouve immédiatement  $(X-1)^4$ .

## II.3 Lien avec les valeurs propres

### II.3.1 Théorème

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$

1.  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  ssi  $\chi_f(\lambda) = 0$  ie  $\lambda$  est une racine de  $\chi_f$ .
2.  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  ssi  $\chi_A(\lambda) = 0$  ie  $\lambda$  est une racine de  $\chi_A$ .

**Preuve.**

Les deux énoncés sont équivalents. Prouvons le premier.

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(f) &\iff \exists x \in E \setminus \{0\} \ f(x) = \lambda x \\ &\iff \exists x \in E \setminus \{0\} \ x \in \ker(\lambda Id_E - f) \\ &\iff \lambda Id_E - f \notin GL(E) \\ &\iff \det(\lambda Id_E - f) = 0 \end{aligned}$$

■

**Déterminer les éléments propres**

On procède comme suit :

1. Calculer le polynôme caractéristique
2. Trouver les racines dudit polynôme
3. Calculer les espaces propres qui correspondent.

**II.3.2 Exemple**

Trouver les éléments propres de  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On a  $\chi_A = X^2 - 2X + 2$  donc les valeurs propres de  $A$  sont  $1 \pm i$ .

— Calcul de  $E_{1+i}$ . Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ .  $X \in E_{1+i}$  ssi  $AX = (1+i)X$  ssi  $\begin{cases} x - y = (1+i)x \\ x + y = (1+i)y \end{cases}$  ssi  $-ix - y = 0$

(on remarque que la deuxième ligne est forcément proportionnelle à la première car  $1+i$  est valeur propre donc  $E_{1+i} \neq \{0\}$ . Ici le facteur est  $i$ ). Ainsi  $E_{1+i} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ .

— Calcul de  $E_{1-i}$ . On trouve  $E_{1-i} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ .

**II.3.3 Corollaire**

Tout endomorphisme de  $E$  possède  $n$  valeurs propres dans  $\mathbb{C}$  (comptées avec multiplicité).

**II.3.4 Proposition (Déterminant triangulaire par bloc)**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de la forme  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $A, C$  sont des matrices carrées (de tailles quelconques, y compris 1). Alors  $\det(M) = \det(A) \det(C)$ .

**Preuve.**

Notons  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  (ie notons  $p$  la taille de  $A$ ).

- Si  $p = 1$ , alors le résultat est simplement l'application du développement par rapport à la première colonne.
- Supposons le théorème vrai pour les matrices  $A$  de taille  $p \geq 1$ . Montrons le pour  $A$  de taille  $p + 1$ 
  1. Si la première colonne de  $A$  est nulle alors  $\det(A) = \det(M) = 0$  et la formule est vérifiée.
  2. Si  $a_{1,1} \neq 0$  alors on élimine tous les termes de la première colonne de  $A$  par opérations élémentaires sans changer ni la valeur de  $\det(A)$  ni celle de  $\det(M)$ . Notons  $A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  la matrice obtenue après opérations puis en retirant les premières lignes et colonnes de  $A$ . On a alors  $\det(A) = a_{1,1} \det(A')$  et  $\det(M) = a_{1,1} \begin{vmatrix} A' & ? \\ 0 & C \end{vmatrix} = a_{1,1} \det(A') \det(C) = \det(A) \det(C)$ . par hypothèse de récurrence.
  3. Si  $a_{1,1} = 0$ , on échange deux lignes dans  $M$  (et dans  $A$ ) pour placer un coefficient non nul en position 1, 1. Ceci oppose à la fois  $\det(A)$  et  $\det(M)$ . On est maintenant revenu au cas précédent, sauf que l'on calcule  $-\det(M) = (-\det(A)) \det(C)$ .
- Par récurrence, le théorème est vrai pour toute taille de la matrice  $A$ .

■

**II.3.5 Théorème**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in Sp(f)$ . Notons  $\mu(\lambda)$  la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de  $\chi_f$  (on appelle cette quantité la multiplicité de la valeur propre  $\lambda$ ).

$$1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq \mu(\lambda)$$



**Preuve.**

—  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  donc  $E_\lambda \neq \{0_E\}$  de donc  $1 \leq \dim(E_\lambda)$ .

— Soient  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E_\lambda$ . On complète cette base en  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $0, B, C$  sont des matrices. Ainsi, pour  $x \in \mathbb{K}$ ,  $\chi_f(x) = \begin{vmatrix} (x - \lambda)I_p & -B \\ 0 & xI_{n-p} - C \end{vmatrix} = \det((x - \lambda)I_p) \det(xI_{n-p} - C) = (x - \lambda)^p \chi_C(x)$ .

Ainsi  $\lambda$  est racine de multiplicité au moins  $p$  de  $\chi_f$ . ■

**II.3.6 Exemple**

Reprendre II.2.2 et calculer les espaces propres. On trouve  $E_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $E_{-1} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**II.3.7 Exemple**

Trouver un exemple où  $\dim(E_\lambda) = \mu(\lambda) > 1$ . Prendre une matrice diagonale, ou une projection.

### III Diagonalisation

Rappel :  $E$  est toujours un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ .

#### III.1 Diagonalisabilité

**III.1.1 Définition**

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  est **diagonalisable** ssi il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est diagonale.
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est diagonalisable ssi son application linéaire canoniquement associée est diagonalisable ssi  $A$  est semblable à une matrice diagonale.

**III.1.2 Exemple**

Les projecteurs et symétries.

**III.1.3 Proposition**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $f$  est diagonalisable ssi il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  composée de vecteurs propres de  $f$ .

Dans ce cas  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est diagonale et sa diagonale est composée des valeurs propres de  $f$  associées aux vecteurs propres de  $\mathcal{B}$ .

**Influence de  $\mathbb{K}$**

Comme on l'a vu en pratique, il peut être insuffisant de chercher à diagonaliser un  $\mathbb{R}$ -endomorphisme sur  $\mathbb{R}$ . On peut parfois considérer  $E$  comme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel (polynôme, matrices, colonnes) si cela est autorisé par l'énoncé.

**III.1.4 Exemple**

1. La matrice de II.2.2 n'est pas diagonalisable. En effet les seuls vecteurs propres de  $A$  sont dans  $E_1$  ou  $E_{-1}$ . Si on prend 3 vecteurs propres, au moins deux appartiennent à l'une des deux droites  $E_1$  ou  $E_{-1}$  donc la famille est liée.
2. La matrice de II.3.2 est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  mais pas dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Si  $e_1 \in E_{1-i}$  et  $e_2 \in E_{1+i}$  et  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}}(e_1, e_2)$  alors  $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ .

Remarquez qu'on a  $A = PDP^{-1}$ .

**III.1.5 Théorème**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $f$  est diagonalisable ssi  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda = E$ .

**Preuve.**

On sait déjà qu'une somme d'espace propres est directe et donc a priori  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda \subset E$ .

- Supposons  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda = E$ . Alors la concaténation de bases des  $E_\lambda$  est une base de  $E$  qui est composée de vecteurs propres (des vecteurs NON NULS des  $E_\lambda$  car ils se trouvent dans des familles libres).
- Réciproquement, supposons  $f$  diagonalisable. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base dans laquelle  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est diagonale. Elle est composée de vecteurs propres par définition des vecteurs propres (encore une fois, des vecteurs d'une famille libre sont forcément non nuls). Ainsi pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_k \in \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$  (il est dans l'un des espaces de la somme).  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$  contient donc une base de  $E$  donc  $E \subset \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$  ce qui prouve l'égalité de ces ensembles. ■

**III.1.6 Théorème**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

$f$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  ssi  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et pour tout  $\lambda \in Sp(f)$   $\dim(E_\lambda) = \mu(\lambda)$  (la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $\chi_f$ ).

**Preuve.**

- Supposons  $f$  diagonalisable. Alors  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda = E$ , ainsi  $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda) = \dim(E)$ .  
 Or on a également  $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda) \leq \sum_{\lambda \in Sp(f)} \mu(\lambda) \leq n$  (un polynôme de degré  $n$  ne peut pas avoir plus de  $n$  racines dans  $\mathbb{K}$ ).  
 Ainsi  $\chi_f$  est scindé. De plus,  $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \underbrace{(\mu(\lambda) - \dim(E_\lambda))}_{\geq 0} = 0$  et donc tous les nombres de cette somme sont nuls.
- Réciproquement, supposons  $\chi_f$  scindé et  $E_\lambda$  de dimension maximale pour tout  $\lambda \in Sp(f)$ .  
 Alors  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda \subset E$  et  $\dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in Sp(\mathbb{K})} \dim(E_\lambda) = n$  ce qui prouve l'égalité de ces deux espaces vectoriels et donc la diagonalisabilité de  $f$  d'après le théorème III.1.5 ■

**Remarque**

On a prouvé au passage que  $f$  est diagonalisable ssi la somme des dimensions des espaces propres vaut  $n$ .

**III.1.7 Exemple**

1. Montrer que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  canoniquement associée à  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.
2. Montrer que  $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ -2x - y \end{pmatrix}$  est diagonalisable.

**III.1.8 Proposition**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . SI  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et à racines simples ALORS  $f$  est diagonalisable.

**Remarque**

Cette condition n'est absolument pas nécessaire : prendre une projection sur un plan de  $\mathbb{R}^3$ .

**Traduction sur les matrices**

Elle est immédiate. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1.  $A$  est diagonalisable ssi il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{K}^n$  composée de vecteurs propres de  $A$ . Si on note  $P$  la matrice de passage de la base canonique à  $\mathcal{B}$  alors  $P^{-1}AP$  est diagonale.
2.  $A$  est diagonalisable ssi  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda = \mathbb{K}^n$ .
3.  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  ssi  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et pour tout  $\lambda \in Sp(A)$   $\dim(E_\lambda) = \mu(\lambda)$ .
4. SI  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et à racines simples ALORS  $A$  est diagonalisable.

### III.2 Applications

#### Calcul de puissances

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Si  $x$  est un vecteur propre de  $f$  associée au scalaire  $\lambda$  alors  $f(x) = \lambda x$  et  $\forall k \in \mathbb{N} f^k(x) = \lambda^k x$ .
2. Si  $A$  est diagonalisable sous la forme  $A = PDP^{-1}$  alors  $\forall k \in \mathbb{N} A^k = PD^k P^{-1}$ .

#### Matrices particulières

1. Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice nilpotente d'ordre  $p > 0$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $N$  et  $X \in E_\lambda(N)$ . Alors pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $N^k X = \lambda^k X$  en particulier pour  $k = p$ ,  $0 = \lambda^p X$  donc  $\lambda^p = 0$  et finalement  $\lambda = 0$ .  
La seule valeur propre possible de  $N$  est 0 et donc  $N$  ne peut pas être diagonalisable (Sinon  $N = P \times 0 \times P^{-1} = 0$ ).
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice n'ayant qu'une seule valeur propre  $\lambda$  et diagonalisable.  
Alors pour une certaine matrice  $P$ ,  $A = P \lambda I_n P^{-1} = \lambda I_n$ .

#### Une suite d'ordre 3

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ . Alors  $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix} X_n$

Par une récurrence immédiate,  $X_n = A^n X_0$ . Calculons  $A^n$  en la diagonalisant si possible. On a  $\chi_A(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6 = (X + 1)(X - 2)(X - 3)$ . Ainsi  $A$  est diagonalisable et  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  est une matrice diagonale associée via la matrice de passage  $P$ .

On a alors  $X_n = PD^n P^{-1} X_0$ . Les coefficients de  $PD^n P^{-1} X_0$  sont des combinaisons linéaires de  $(-1)^n, 2^n$  et  $3^n$ . Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N} u_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n + \gamma 3^n$  avec  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  à déterminer.

#### III.2.1 Théorème

Soit  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite et  $p \geq 1$ . On suppose qu'il existe  $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}$ .

1. Le polynôme  $P = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k + X^p$  est appelé polynôme caractéristique de  $(u_n)$ .
2. Si  $P$  est scindé à racines simples, notées  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  alors il existe des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} u_n = \sum_{k=1}^p \alpha_k \lambda_k^n$$

#### Preuve.

Reprenons la trame de l'exemple précédent.

La matrice est maintenant  $A(a_0, \dots, a_{p-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & & & a_{p-1} \end{pmatrix}$  Soit  $x \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & x & -1 \\ -a_0 & & & & x - a_{p-1} \end{vmatrix} \\
&= x \begin{vmatrix} x & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \\ -a_1 & \dots & & x - a_{p-1} \end{vmatrix} + (-1)^{p+1}(-a_0) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ x & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \end{vmatrix} \\
&= x \det(xI_{p-1} - A(a_1, \dots, a_{p-1})) - a_0
\end{aligned}$$

On peut donc procéder par récurrence, si  $\det(xI_{p-1} - A(a_1, \dots, a_{p-1})) = x^{p-1} - \sum_{k=0}^{p-2} a_{k+1}x^k$  (remarquer le changement d'indice pour  $a$ , le premier des coefficients dans la matrice est  $a_1$ ) alors

$$\chi_A(x) = x \left( x^{p-1} - \sum_{k=0}^{p-2} a_{k+1}x^k \right) - a_0 = x^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k$$

en changeant d'indice et en incorporant  $a_0$  à la somme.

Si  $\chi_A$  est scindé à racines simples, alors  $A$  est diagonalisable et on peut conclure comme dans l'exemple précédent. ■

### III.2.2 Exemple

Dans le cas général, montrer que les espaces propres de  $A(a_0, \dots, a_{p-1})$  sont des droites et donc que  $A(a_0, \dots, a_{p-1})$  est diagonalisable ssi  $\chi$  est scindé à racines simples.

## IV Trigonalisation

### IV.1 Théorie

#### IV.1.1 Théorème

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  ssi il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est triangulaire supérieure (on dit que  $f$  est trigonalisable).

La diagonale est constituée de toutes les racines de  $\chi_f$ , avec multiplicité (une racine de multiplicité  $r$  apparaît  $r$  fois sur cette diagonale).

**Preuve.**

Admis! ■

#### IV.1.2 Corollaire

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est trigonalisable dans  $\mathbb{C}$  ie il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $PAP^{-1}$  est triangulaire supérieure.

**Preuve.**

Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé! ■

#### IV.1.3 Exemple

On reprend la matrice du II.2.2.  $A$  n'est pas diagonalisable car  $\dim(E_1) = 1 < 2 = \mu(1)$ .

On note  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Alors  $Au = -u$  et  $AV = v$ .

Trouver  $w$  tel que  $Aw = w + v$ . Le système à résoudre est

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 1 = z - 2 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

On prend  $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Dans la base  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  est  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  qui est bien triangulaire.

## IV.2 Conséquences pratiques

### IV.2.1 Proposition

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les racines (complexes) de  $\chi_f$  non nécessairement distinctes.

1.  $\operatorname{tr}(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$
2.  $\det(f) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$

Le même résultat vaut pour les matrices.

### Remarque

On retrouve le fait que  $f$  est bijective (ou  $A$  est inversible) ssi 0 n'est pas valeur propre de  $f$ .

## IV.3 Deviner la dernière valeur propre

Remarquons que 1 est valeur propre au moins double de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Comme  $\operatorname{tr}(A) = 6$ , la dernière valeur propre complexe  $\lambda$  vérifie  $1 + 1 + \lambda = 6$  et donc  $\lambda = -4$ . On a calculé la trace d'une matrice triangulaire semblable à  $A$ .



# Chapitre 9

## Intégrales à paramètres

### I Intégrales dépendant d'un paramètre

#### I.1 Cadre d'étude

##### Transformée de Laplace

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  au moins et continue.

La transformée de Laplace de  $f$  est la fonction  $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$  quand cette fonction  $F$  est bien définie. En particulier, si  $f$  est un  $O_{+\infty}(t^k)$  pour un  $k \in \mathbb{N}$  alors  $F$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ .

Si  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  alors  $F$  est définie sur  $[0, +\infty[$ .

##### La fonction Gamma

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . A quelle condition sur  $\alpha$  l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  est-elle convergente ?

Remarquons que  $f : t \mapsto t^{\alpha-1} e^{-t}$  est continue et positive sur  $]0, +\infty[$  et même continue en 0 (par prolongement) si  $\alpha \geq 1$ .

- Etude en 0. On a  $f(t) \underset{0}{\sim} t^{\alpha-1}$  qui est intégrable au voisinage de 0 ssi  $-(\alpha-1) < 1$  ie  $\alpha > 0$ . Par comparaison de fonctions positives,  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$  ssi  $\alpha > 0$ .
- Etude en  $+\infty$ . On a  $t^2 f(t) = t^{\alpha+1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  par croissances comparées et donc  $f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ . Par comparaison de fonctions positives,  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

Conclusion :  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  ssi  $\alpha > 0$ .

On pose maintenant  $\Gamma : \begin{cases} ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \end{cases}$ . Cette fonction est bien définie.

##### I.1.1 Exemple

Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2+x} dt$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ .

##### I.1.2 Exemple

Donner l'ensemble de définition de  $f : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$ .

#### I.2 Continuité

##### I.2.1 Théorème

Soit  $I, J$  deux intervalles non triviaux de  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : \begin{cases} I \times J & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) & \mapsto \varphi(x, t) \end{cases}$  une fonction. Supposons que :

1. Pour  $x \in I$  fixé,  $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $J$ .
2. Pour  $t \in J$  fixé,  $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $I$ .
3. (hypothèse de domination) Il existe  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive, continue et **intégrable** sur  $J$  telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J \quad |\varphi(x, t)| \leq g(t)$$

Alors la fonction  $f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \int_J \varphi(x, t) dt \end{cases}$  est définie et continue sur l'intervalle  $I$ .

**Preuve.**

On montre juste que  $f$  est bien définie, ie que pour  $x \in I$  fixé,  $\int_J \varphi(x, t) dt$  converge.

Or pour  $x$  fixé, on a  $\forall t \in J$   $|\varphi(x, t)| \leq g(t)$  avec  $g$  intégrable sur  $J$ . Par comparaison de fonctions positives,  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est intégrable sur  $J$  donc son intégrale converge. Ainsi  $f(x)$  existe bien. ■

**Remarque**

1. La première hypothèse assure que la convergence de l'intégrale  $\int_J \varphi(x, t) dt$  peut avoir du sens.
2. La deuxième hypothèse est "naturelle". On veut que la fonction  $f$  qui dépend de  $x$  soit continue. Il faut donc partir de fonctions de  $x$  qui soient continue.
3. La troisième hypothèse est la plus importante et la plus délicate en pratique. Il faut trouver un majorant de  $|\varphi(x, t)|$  qui **ne dépend pas** de la valeur de  $x$  mais peut éventuellement dépendre de celle de  $t$ .  
Ensuite on prouve que notre fonction majorante est bien intégrable, en utilisant souvent le théorème de comparaisons des fonctions positives.

**I.2.2 Exemple**

Montrer que  $f : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . On pose  $\varphi : (x, t) \mapsto \cos(x \sin(t))$  définie sur  $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé. On a déjà vu que  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $[0, \pi]$ .
2. Soit  $t \in [0, \pi]$  fixé. Alors  $x \mapsto \cos(x \sin(t))$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (de la forme  $x \mapsto \cos(\alpha x)$  pour un  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixé).
3. Dominons! Soit  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$ . Alors  $|\cos(x \sin(t))| \leq 1$ . Comme la fonction constante 1 est intégrable sur  $[0, \pi]$  on peut appliquer le théorème précédent.

Conclusion :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque sur l'hypothèse de domination**

Le cas précédent peut se généraliser facilement dans le cas où l'intervalle d'intégration  $J$  est un intervalle de la forme  $[\alpha, \beta]$ . Il suffit de trouver une constante qui majore  $|\varphi|$ .

Si de plus on a  $I = [a, b]$  et que  $\varphi$  est continue sur  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  qui est fermé et borné, alors  $|\varphi|$  est également continue et donc est bornée sur ce fermé borné (on sait même qu'elle atteint un minimum et un maximum). Ainsi on peut dominer par une constante et conclure.

**I.2.3 Proposition**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction.

Pour  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  si et seulement si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $I$ .

**Preuve.**

Commençons par prouver la continuité (ou dérivabilité) de  $f$  sous l'hypothèse  $f$  est continue (respectivement dérivable) sur tout segment inclus dans  $I$ .

Soit  $x_0 \in I$ . Si  $x_0$  est une borne de  $I$ , et  $J$  un segment non réduit à un point d'extrémité  $x_0$  et inclus dans  $I$ . Alors la continuité de  $f$  en  $x_0$  est une continuité à gauche ou à droite et est donc assurée par la continuité sur  $J$ .

Si  $x_0$  n'est pas une extrémité de  $I$ , on prend cette fois un segment contenant  $x_0$  (de la forme  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  pour un  $\alpha > 0$ ) et la continuité de  $f$  en  $x_0$  est bien assurée (à gauche et à droite).

Les mêmes arguments assurent la dérivabilité.

Le reste de la preuve se fait par récurrence : si  $f$  est  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur tout segment pour un  $k \geq 0$  fixé, alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f'$  est  $\mathcal{C}^k$  sur tout segment donc  $\mathcal{C}^k$  et finalement  $f$  est bien  $\mathcal{C}^{k+1}$ .

On conclut grâce au principe de récurrence. ■

**Domination locale**

$$\Gamma : \begin{cases} ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \end{cases} .$$

Soit  $a, b > 0$  avec  $a < b$ . Montrer que  $\Gamma$  est continue sur  $[a, b]$ . On pose  $\varphi : (x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1) \ln(t)} e^{-t}$ .

1. Pour  $x \in [a, b]$  fixé,  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
2. Pour  $t > 0$  fixé,  $x \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $[a, b]$ .



$$3. \text{ Soit } x \in [a, b] \text{ et } t > 0. t^{x-1}e^{-t} \leq \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \in ]0, 1[ \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

Dans tous les cas  $|t^{x-1}e^{-t}| \leq (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$  qui est intégrable sur  $]0, +\infty[$  par somme et d'après l'étude du début de chapitre.

Finalement  $\Gamma$  est continue sur  $[a, b]$ .

Montrons maintenant que  $\Gamma$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . Soit  $x > 0$ . Alors  $\Gamma$  est continue sur  $[x/2, x+1]$  et donc continue en  $x$ . Ainsi  $\Gamma$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

### Remarque sur la domination

Le raisonnement est très souvent (dans le cas où on parle d'intégrales impropres), de fixer  $t \in J$  et trouver la plus grande valeur de  $|\varphi(x, t)|$  pour  $x$  dans l'intervalle considéré.

#### 1.2.4 Exemple

Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t+x} dt$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

On remarque que même pour  $x = 0$ ,  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$  se prolonge par continuité en 0 (valeur 1) car  $\sin(t) \sim_0 t$ .

## II Dérivabilité

### II.1 Approche intuitive

#### Le résultat désirable

On reprend le cadre précédent et on se demande si la fonction  $f : x \mapsto \int_J \varphi(x, t) dt$  est dérivable. Il s'agit d'une fonction de la variable  $x$ , si tout se passait pour le mieux on pourrait dériver par rapport à  $x$  comme des brutes :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_J \varphi(x, t) dt = \int_J \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} dt$$

#### Hypothèses

Donner les hypothèses sur  $\varphi$  pour que les intégrales considérées puissent exister.

### II.2 Le théorème

#### II.2.1 Théorème

Soit  $I, J$  deux intervalles non triviaux de  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : \begin{cases} I \times J & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) & \mapsto \varphi(x, t) \end{cases}$  une fonction. Supposons que :

1. Pour  $x \in I$  fixé,  $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $J$  et **intégrable** sur  $J$ .
2. Pour  $t \in J$  fixé,  $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .
3. Pour  $x \in I$  fixé,  $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \varphi'_t(x)$  est continue sur  $J$
4. (hypothèse de domination) Il existe  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive, continue et **intégrable** sur  $J$  telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t)$$

Alors la fonction  $f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \int_J \varphi(x, t) dt \end{cases}$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $I$ . De plus, pour  $x \in I$

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt$$

#### Remarque sur les hypothèses

1. Vérifier l'intégrabilité de la fonction de  $t$  revient à déterminer le domaine de définition de  $f$ . En particulier, si on a déjà prouvé la continuité de  $f$ , c'est déjà prouvé!
2. On veut dériver par rapport à  $x$ , comme d'habitude, on s'assure que cette opération est licite.

3. Nous n'intégrons que des fonctions continues. Vu la conclusion (désirée, voir le point précédent), cette vérification est naturelle.
4. Cette fois, c'est la dérivée partielle par rapport à  $x$  qu'il faut dominer. Les mêmes remarques et techniques s'appliquent. En particulier, le but est d'obtenir un majorant **qui ne dépend pas de  $x$** .

**II.2.2 Exemple**

Montrer que  $f : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $\varphi : (x, t) \mapsto \cos(x \sin(t))$  est dérivable par rapport à  $x$  par composition et  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} : (x, t) \mapsto -\sin(t) \sin(x \sin(t))$  est continue sur  $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ . Ceci prouve les 3 premières hypothèses.

Pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$ ,  $|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)| \leq 1$  et 1 est intégrable sur le segment  $[0, \pi]$ . D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $f' : x \mapsto \int_0^\pi \sin(t) \cos(x \sin(t)) dt$ .

**Fonction  $\Gamma$**

Montrer que la fonction  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur tout  $[a, b]$  segment non trivial de  $]0, +\infty[$ . On en déduit que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

**La classe  $\mathcal{C}^\infty$**

En résumé, pour prouver que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$

1. Justifier des continuités.
2. Calculer les dérivées partielles par rapport à  $x$ , justifier les continuités par rapport à  $t$  puis dominer chaque dérivée.

**II.2.3 Exemple**

Soit  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$ . Donner le domaine de définition de  $f$ , prouver que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  et calculer  $f'$ .

La fonction  $\varphi$  est  $\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} \end{cases}$ .

Pour  $x = 0$ , l'intégrale  $f(0)$  converge d'après le cours sur les intégrales. Pour  $x > 0$ ,  $|e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}| = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$  donc  $f(x)$  existe bien.

Soient  $a > 0$ . On va montrer la classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$ .

1. Soit  $x \geq a$  fixé.  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue et intégrable sur  $]0, +\infty[$  d'après l'étude précédente.
2. Soit  $t > 0$  fixé.  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = e^{-xt} \sin(t)$ .
3. Soit  $x \in [a, +\infty[$  fixé.  $t \mapsto e^{-xt} \sin(t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

Remarque : on peut remplacer ces deux dernières vérifications par :  $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, +\infty[ \times ]0, +\infty[, \mathbb{R})$  par composition, produit et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

4. Soit  $x \geq a$  et  $t > 0$ .  $|e^{-xt} \sin(t)| \leq e^{-at}$  qui est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

Finalement,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$  et donc (le raisonnement étant valable pour tout  $a > 0$ ) sur  $]0, +\infty[$ .

De plus, pour  $x > 0$ ,  $f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(t) dt = \text{Im}(\int_0^{+\infty} e^{-xt+it} dt) = \text{Im}(\frac{1}{-x+i}) = -\frac{1}{1+x^2}$ .

Ainsi  $f(x) = K - \arctan(x)$ . De plus, pour tout  $t > 0$ ,  $|\frac{\sin(t)}{t}| \leq 1$  (IAF par exemple), donc  $|f(x)| \leq \int_0^{-\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ .

Ainsi  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et finalement  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$  pour tout  $x > 0$ .

**II.2.4 Exemple**

On considère la fonction  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{cases}$  et  $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ .

Montrons que  $f$  est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$

— Soit  $x \geq 0$  fixé. Alors  $\varphi_x : t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  donc intégrable.

Ainsi  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

— Soit  $t \in [0, 1]$  fixé. Alors  $\varphi_t : x \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$  est bien dérivable par composition (et produit par une constante) et pour  $x \geq 0$  on a  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ .

— Soit  $x \geq 0$  fixé. Alors  $t \mapsto 2xe^{-x^2(1+t^2)}$  est bien continue sur  $[0, 1]$  par composition (et produit par une constante).

— Soient  $a, b \geq 0$  avec  $a < b$ .

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  est continue sur  $[a, b] \times [0, 1]$  qui est fermé et borné donc est bornée par une constante  $M \in \mathbb{R}^+$  qui est intégrable sur  $[0, 1]$ .

On a montré que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur tout segment  $[a, b] \subset [0, +\infty[$  (on peut prendre  $a = 0$ ) et donc  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .  
De plus, pour  $x \geq 0$

$$f'(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2} e^{-x^2 t^2} dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} x dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} dt$$

Si on pose  $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$  alors  $g$  est la primitive de  $t \mapsto e^{-t^2}$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0 et on a  $f'(x) = -2g'(x)g(x) = -(g^2)'(x)$ .

Ainsi  $f = -g^2 + K$  où  $K$  est une constante à déterminer. Comme  $f(0) = \frac{\pi}{4}$  et  $g(0) = 0$ , on a  $K = \frac{\pi}{4}$ .

De plus,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  car  $f$  est positive et vérifie  $0 \leq f(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}$ . Comme  $g(x) \geq 0$  pour  $x \geq 0$  on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .



# Chapitre 10

## Courbes paramétrées

Dans tout ce cours,  $I$  désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

### I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

En pratique,  $n = 2$  ou  $3$ , mais cette distinction n'est pas vraiment nécessaire dans ce qui va suivre.

#### I.1 Norme, distance

##### I.1.1 Définition

Si  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ , sont de coordonnées  $(x_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  et  $(y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ , alors le produit scalaire (canonique) de  $X$  et  $Y$  (noté  $\langle X, Y \rangle$  ou  $(X|Y)$ ) est

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

La norme de  $X$  est donnée par  $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  et la distance de  $X$  à  $Y$  est  $\|X - Y\|$ . On note cette dernière  $d(X, Y)$ .

##### I.1.2 Proposition

1. Le produit scalaire est symétrique ( $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$ ), bilinéaire, positif ( $\langle X, X \rangle \geq 0$ )

2. La norme vérifie :

—  $\|X\| = 0 \iff X = 0$

—  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$

—  $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

—  $|\|X\| - \|Y\|| \leq \|X \pm Y\|$

— Pour  $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathbb{R}^p$  et  $(X_i) \in (\mathbb{R}^n)^p \quad \left\| \sum_{i=1}^p \alpha_i X_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p |\alpha_i| \|X_i\|$

Les trois dernières propriétés sont appelées inégalité triangulaire

#### I.2 Continuité, dérivabilité

##### I.2.1 Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction,  $a \in I$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ . On dit que  $f$  admet  $b$  comme limite en  $a$  (notations habituelles) ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall t \in I \quad |t - a| \leq \alpha \Rightarrow \|f(t) - b\| \leq \varepsilon$$

Dans le cas où  $b$  existe, elle est unique et vaut  $f(a)$ . On dit alors que  $f$  est continue en  $a$ .

$f$  est dite continue sur  $I$  si elle est continue en tout point  $a$  de  $I$ .

**I.2.2 Proposition**  
 Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$  (les **fonctions**  $f_1, \dots, f_n$  sont appelées applications coordonnées). Soit  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  et  $a \in I$ .

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = b \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \lim_{t \rightarrow a} f_i(t) = b_i$$
**Preuve.**

Pour  $t \in I$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $|f_i(t) - b_i| \leq \|f(t) - b\|$  (avec égalité ssi toutes les autres coordonnées de  $f(t) - b$  sont nulles). Or  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} b \iff \|f(t) - b\| \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0$ .

Ainsi SI  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} b$  ALORS  $f_i(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} b_i$ .

Réciproquement, observons que  $\|f(t) - b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i(t) - b_i)^2}$ . Par compositions, somme puis composition (trouver les fonctions), si tous les  $f_i(t) - b_i$  tendent vers 0 alors  $\|f(t) - b\| \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0$ . ■

**Remarque**

On retrouve le fait (connu) que la continuité des fonctions à valeurs complexes est équivalente à celles des parties réelle et imaginaire. De manière plus générale,  $f$  est continue ssi toutes ses applications coordonnées sont continues.

**Dérivabilité**

La définition de la dérivabilité (tout court, à gauche ou à droite) est mot pour mot la même que pour des fonctions à valeurs réelles. Seule change la définition du symbole  $\lim$  utilisé. Remarquons que les quotients du type  $\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$  sont bien définis car  $\frac{1}{t - a}$  est un réel (ce quotient est bien défini dès que  $f$  est à valeurs dans un  $\mathbb{R} - ev$  : on doit pouvoir faire des produits par des réels et une soustraction sur les valeurs de  $f$ ).

Quand  $f$  est dérivable sur  $I$ , la fonction dérivée  $f'$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Cinématique**

Si la fonction  $f$  étudiée représente les coordonnées d'un mobile au cours du temps, alors  $f'$  est le vecteur vitesse du mouvement.

**I.2.3 Proposition**

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dérivable (en un point ou sur  $I$ ) ssi ses fonctions coordonnées  $f_1, \dots, f_n$  le sont et on a alors

$$f' = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_n \end{pmatrix}. f \text{ est alors continue.}$$

**I.2.4 Exemple**

$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Reconnaître la fonction à valeurs complexes associée.

**I.2.5 Proposition**

L'application  $D : f \mapsto f'$  est linéaire de  $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$  dans  $(\mathbb{R}^n)^I$  ie pour  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dérivables et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ .

**Preuve.**

Le vérifier sur chaque coordonnée. ■

**I.2.6 Proposition**

Soient  $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$  et  $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), v \in \mathcal{D}(J, I)$  ( $v$  est à valeurs dans  $I$ ).

1.  $u \times f$  est dérivable et  $(uf)' = u'f + uf'$ .
2. Si  $u$  ne s'annule pas  $\frac{1}{u}f$  est dérivable et  $(\frac{1}{u}f)' = \frac{1}{u^2}(uf' - u'f)$
3.  $f \circ v$  est dérivable sur  $J$  et  $(f \circ v)' = v' \times f' \circ v$
4.  $\langle f, g \rangle$  est dérivable et  $(\langle f, g \rangle)' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$
5. (cas  $n = 3$ )  $f \wedge g$  est dérivable et  $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$ .
6. (cas  $n = 2$ )  $\det(f, g)$  est dérivable et  $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$ .

**I.2.7 Exemple**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dérivable. Etudier la dérivabilité et la dérivée de  $\|f\|$ .

**I.3 Taylor-Young**

**Dérivées d'ordre supérieur**

On peut étendre de manière similaire (en reprenant les mêmes définitions, puis on constate qu'il suffit de vérifier la propriété sur les fonctions coordonnées) les notions de dérivées d'ordre  $k$ , de classe  $\mathcal{C}^k$  pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Combinaison linéaire, produit**

Les formules de dérivée  $k$ -ième usuelles s'appliquent encore (avec les mêmes preuves) dans le cas d'une combinaison de fonctions  $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$  et dans le cas du produit  $uf$  où  $u \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$  et  $f \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$  (l'idée est qu'il faut s'assurer que les opérations en jeu possèdent un sens : pas de produit de vecteur, on ne somme pas un nombre et un vecteur...)

$o_a(1)$

Dans la suite du chapitre, la notation  $o_a(1)$  représente une fonction (à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ) dont la limite en  $a$  est  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Il s'agit donc d'une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les coordonnées sont des  $o_a(1)$  (celui que l'on connaissait). Plus généralement si  $g$  est à valeurs réelles,  $o_a(g)$  sera une fonction vectorielle dont toutes les coordonnées sont des  $o_a(g)$  au sens habituel.

**I.3.1 Théorème (Taylor-Young)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$  et  $a \in I$  Alors

$$f(t) = f(a) + (t-a) \underbrace{f'(a)}_{\text{vitesse}} + \frac{(t-a)^2}{2!} \underbrace{f''(a)}_{\text{accélération}} + \dots + \frac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + (t-a)^p o_a(1)$$

**II Etude de courbes**

**II.1 Courbes dans  $\mathbb{R}^2$**

**II.1.1 Définition**

Une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$  dans  $\mathbb{R}^2$  est une fonction  $f : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{cases}$ . Le **support** de la courbe est  $f(I)$  (l'ensemble des points  $M(t)$ , ou encore la trajectoire du point  $M$ ).

**II.1.2 Exemple**

Quel est le support de la courbe  $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$  définie sur  $[-\pi, \pi]$ ? Remarquer que la variable  $t$  n'apparaît pas graphiquement.

On note souvent  $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ . Le but n'est pas de tracer la courbe représentative des fonctions  $x$  et  $y$  mais bien la trajectoire du mobile dont on connaît les coordonnées en fonction du temps.

### II.1.3 Définition

Soit  $f$  une courbe  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$  et  $t_0 \in I$ . Si  $f'(t_0) \neq \vec{0}$ , on dit que le point  $t_0$  est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de  $f$  sont réguliers,  $f$  est dite régulière.

### Courbes représentatives

Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  (numérique). On considère la courbe  $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ .

Le support de  $f$  est alors  $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \mid t \in I \right\}$ , c'est à dire la courbe représentative de la fonction  $\varphi$  ! De plus,  $f$  est régulière.

Question subsidiaire : que dire de la courbe paramétrée  $g : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ t \end{pmatrix}$  ?

## II.2 Domaine d'étude

Très souvent, il faudra calculer  $I$ . Tout comme pour les fonctions numériques paires, impaires ou périodiques, on peut parfois réduire l'étude à un intervalle plus petit. Ceci correspond à une certaine symétrie du support de la courbe.

### Méthode générale

Il s'agit d'observer les coordonnées de  $M(\varphi(t))$  où  $\varphi : t \mapsto -t$  ou  $t + T$  ou  $t_0 - t$  ou  $\frac{1}{t}$ ... Si les coordonnées obtenues correspondent à une transformation géométrique connue, on réduit l'intervalle d'étude, et on appliquera la transformation au morceau de support déjà tracé.

### II.2.1 Exemple

1. Réduire le domaine de  $t \mapsto \begin{pmatrix} \ln(t) \\ \frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix}$
2.  $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ . Attention à la traduction de la périodicité.

$t_0 - t$

Sur un intervalle du type  $[0, t_0]$  on peut toujours essayer de changer  $t$  en  $t_0 - t$  pour se ramener à une étude sur  $[0, \frac{t_0}{2}]$ .

Plus généralement, donner la transformation affine correspondante pour l'intervalle  $[a, b]$ .

## II.3 Tangentes, variations

Maintenant que nous disposons d'un domaine d'étude raisonnable, il nous faut tracer l'allure du support. Pour cela nous allons déterminer si la courbe se "dirige" vers la gauche ou la droite ( $x$  est décroissante ou croissante), vers le haut ou le bas (variations de  $y$ ).

### Etude des variations

Il s'agit là simplement de donner un tableau de variations complet pour  $x$  et  $y$ , tout en notant les points d'annulation des dérivées (on repère ainsi les éventuels points singuliers).

### Cordes

La corde passant par les points (distincts)  $M(t)$  et  $M(a)$  est dirigée par le vecteur unitaire  $\frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{\|M(a)M(t)\|}$

### II.3.1 Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée et  $t_0 \in I$ . On dit que  $f$  possède une demi tangente à gauche (resp. à droite) en  $t_0$  ssi  $\lim_{t \rightarrow a^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|}$  existe (resp. limite à droite). Notons  $\vec{u}_-$  et  $\vec{u}_+$  ces limites quand elles existent.

La demi-tangente à gauche de  $f$  en  $a$  est alors  $f(a) + \text{Vect}(\vec{u}_-)$  et la demi-tangente à droite est  $f(a) + \mathbb{R}\vec{u}_+$ . Si ces droites sont confondues ( $\vec{u}_-$  et  $\vec{u}_+$  sont colinéaires) alors la droite obtenue est la tangente à  $f$  en  $a$ .



**II.3.2 Théorème**

Si  $t_0$  est un point régulier de la courbe  $f$  alors  $f$  possède une tangente en  $t_0$  dirigée par  $f'(t_0)$ .

**Preuve.**

D'après le théorème de Taylor-Young, et par continuité de la norme,  $\|f(t) - f(t_0)\| \underset{t_0}{\sim} |t - t_0| \|f'(t_0)\| \neq 0$ . Ainsi

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|} \underset{t_0}{\sim} \frac{1}{\|f'(t_0)\|} \frac{f(t) - f(t_0)}{|t - t_0|} \xrightarrow{t_0} \pm \frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}.$$

**II.3.3 Exemple**

Remarquer les tangentes horizontales et verticales de  $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ .

**II.4 Points singuliers**

**Continuer à dériver**

Le raisonnement précédent s'étend sans difficulté cas le cas où  $f'(t_0) = 0$  mais  $f^{(p)}(t_0) \neq 0$  pour un  $p > 1$  (que l'on prend le plus petit possible). Allons plus loin et trouvons de plus  $q > p$  le plus petit entier tel que  $\vec{u}_p = f^{(p)}(t_0), \vec{u}_q = f^{(q)}(t_0)$  est libre.

Alors dans le repère  $(M(t_0), \vec{u}_p, \vec{u}_q)$ , les coordonnées de  $M(t)$  (notées  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$ ) vérifient

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o_{t_0}((t-t_0)^p) \\ \beta(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o_{t_0}((t-t_0)^q) \end{cases}$$

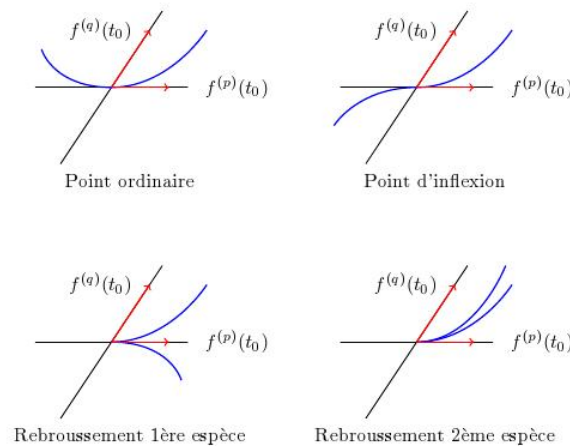
c'est à dire que la courbe "suit" les directions d'abord de sa tangente (de direction  $\vec{u}_p$ ) puis de  $\vec{u}_q$ .

**Cas p=1, q=2**

La vitesse et l'accélération ne sont pas colinéaires. C'est le cas le plus classique. Le point est dit **birégulier**. Dans ce cas la vitesse donne la direction de la tangente et l'accélération le sens de "courbure".

**Cas général**

Suivant la parité de  $p$  et  $q$  on obtient les 4 cas suivants.



**En pratique**

On peut tout à fait utiliser un développement limité de  $x$  et  $y$  pour obtenir des vecteurs proportionnels aux dérivées successives.

**II.4.1 Exemple**

Etudier la tangente au point de paramètre 0 de  $t \mapsto \begin{pmatrix} \text{ch}(t) \\ t^3 \end{pmatrix}$

Trouver en fonction de  $k \in \mathbb{R}$  les éventuels points singuliers de  $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + 2k \cos(\frac{t}{2}) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

## II.5 Branches infinies

### II.5.1 Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée et  $a \in \bar{I}$ . On dit que  $f$  possède une branche infinie au voisinage de  $a$  si  $\lim_{t \rightarrow a} x(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow a} y(t)$  existent et qu'on est dans un des cas suivant

1. Une des limites est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote horizontale ou verticale.
2. Ces deux limites sont infinies.
  - (a) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$  alors on dit que  $f$  possède une branche parabolique de direction  $(Ox)$ .
  - (b) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$  alors on dit que  $f$  possède une branche parabolique de direction  $(Oy)$ .
  - (c) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$  il y a deux cas
    - i. si  $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$  alors on dit que la droite  $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$  est asymptote à  $f$ .
    - ii. sinon on dit que  $f$  admet une branche parabolique de pente  $\alpha$ .

### II.5.2 Exemple

Etudier les branches infinies de  $x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}$ .

## II.6 Plan d'une étude

On pose  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  et on note  $x$  et  $y$  ses fonctions coordonnées.

1. Souvent, l'intervalle de définition de  $f$  ne sera pas donné. il faut alors commencer l'étude par déterminer le domaine de définition de la courbe.
2. Définir ensuite un domaine d'étude le plus restreint possible en utilisant les symétries des expressions pour  $x$  et  $y$ .
3. Déterminer les variations et les limites de  $x$  et  $y$ , et on résume ces informations dans un tableau de variations.
4. Exhiber les tangentes "intéressantes" ainsi que les points singuliers s'il y en a.
5. Etudier les branches infinies éventuelles.
6. Tracer la courbe en utilisant toutes les informations précédemment glanées.
7. Repérer s'il y a des points **multiples** (par lesquels la courbe passe plusieurs fois) et les déterminer en trouvant

$$t_1, t_2 \text{ tels que } \begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} .$$

# Chapitre 11

## Espaces euclidiens

Dans tout le chapitre, les espaces vectoriels considérés seront des  $\mathbb{R}$ -ev.

### I Produit scalaire et norme

#### I.1 Produit scalaire

##### I.1.1 Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Un produit scalaire sur  $E$  est une application  $\left\{ \begin{array}{l} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x|y) \end{array} \right.$  qui a les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall u, v, w \in E (\lambda u + \mu v|w) = \lambda(u|w) + \mu(v|w)$  et  $(u|\lambda v + \mu w) = \lambda(u|v) + \mu(u|w)$ .
2. Symétrique :  $\forall u, v \in E (u|v) = (v|u)$ .
3. Positive :  $(u|u) \geq 0$ .
4. Définie :  $(u|u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Notation. Un produit scalaire est aussi parfois noté  $\langle u, v \rangle$ , ou  $u \cdot v$ .

**Explication** Cette définition du produit scalaire nous permet de nous passer de la notion d'angle et de distance (ou norme).

##### I.1.2 Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel munit d'un produit scalaire. On dit alors que  $E$  est un espace préhilbertien réel, et si  $E$  est de dimension finie on dit que  $E$  est un espace euclidien.

#### Remarque

1. La bilinéarité implique que  $(0_E|u) = (u|0_E) = 0$  pour tout  $u \in E$ .
2. Pour vérifier qu'une application est bilinéaire, on vérifie une seule linéarité. Ensuite on prouve la symétrie, qui prouve à son tour automatiquement la deuxième linéarité.

##### I.1.3 Exemple

Il faut connaître ces exemples, ainsi que savoir les prouver.

$$1. \text{ Produit scalaire canonique sur } \mathbb{R}^n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right. .$$

- Chaque produit  $x_i y_i$  égal  $y_i x_i$  donc l'application est bien symétrique. Soit  $X, X', Y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
- Alors  $(\lambda X + \mu X'|Y) = \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + \mu x'_k) y_k = \sum_{k=1}^n (\lambda x_k y_k + \mu x'_k y_k) = \lambda(X|Y) + \mu(X'|Y)$ .
- De plus,  $\lambda(X|Y) + \mu(X'|Y) = (\lambda X + \mu X'|Y) = (Y|\lambda X + \mu X') = \lambda(Y|X) + \mu(Y|X')$ , ce qui prouve la deuxième linéarité, comme prévu.
- Avec les mêmes notations,  $(X|X) = \sum_{k=1}^n x_k^2$ . Cette somme est composée de termes positifs donc est positive. De plus, elle est nulle ssi tous ses termes sont nuls. Ainsi  $(\cdot|\cdot)$  est positive est définie.

On remarque que  $(X|Y) = {}^t X Y$  si on prend une notation en colonnes. La linéarité en devient triviale.

2. Cette fois  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $\varphi : (A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$ . Montrons que  $\varphi$  est un produit scalaire. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $\varphi(B, A) = \text{tr}({}^tBA) = \text{tr}({}^t({}^tAB)) = \varphi(A, B)$  car la trace est invariante par transposition.

La linéarité à droite est immédiate par composition de deux applications linéaires.

Calculons  $\varphi(A, A)$ . On note  $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ . Alors  $\text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,i}$  est la somme des carrés de tous les coefficients de  $A$ . Ainsi  $\varphi(A, A) \geq 0$  et on a même  $\varphi(A, A) = 0$  ssi tous les termes de la somme sont nuls (somme de réels positifs) ie  $A = 0$ .

3. Montrons que  $\begin{cases} \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_a^b fg \end{cases}$  est bien un produit scalaire.

La symétrie provient de la commutativité du produit dans  $\mathbb{R}^{[a,b]}$ . La linéarité à gauche est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale.

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Alors  $(f|f) = \int_a^b f^2(t)dt \geq 0$  par positivité de l'intégrale.

De plus si  $(f|f) = 0$  alors  $\int_a^b f^2 = 0$  et donc  $f^2$  est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle : elle est nulle sur le segment  $[a, b]$ . Ainsi  $f^2 = 0$  et donc  $f = 0$ .

4. On se place dans  $E = \mathbb{R}[X]$  et pour  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  on pose  $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ . Montrons que  $\varphi$  est un produit scalaire. Symétrie, bilinéarité, positivité : voir l'exemple précédent.

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\varphi(P, P) = 0$ . Montrons que  $P$  est le polynôme nul. Pour l'instant on sait que la fonction polynomiale associée est nulle sur le segment  $[0, 1]$ . Ainsi  $P$  possède une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

**Remarque**

On peut le plus souvent définir plusieurs produits scalaires sur un même espace. Par exemple,  $\left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \mapsto xx' + 2yy'$  est un autre produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$ .

**I.2 Norme et distance**

**I.2.1 Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire (ie.  $E$  est un espace préhilbertien).

1. On appelle norme (euclidienne) d'un vecteur  $u \in E$  le réel positif  $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$ .
2. On appelle distance (euclidienne) entre deux vecteurs  $u, v \in E$  le réel positif  $d(u, v) = \|v - u\| = \|u - v\|$ .

**Remarque**

On prendra bien garde au fait que la distance ainsi définie dépend du produit scalaire. Calculer  $\|\vec{i}\|$  et  $\|\vec{j}\|$ , la norme sur  $\mathbb{R}^2$  étant associée au produit scalaire de I.1.

**I.2.2 Proposition**

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $x, y \in E$ .

1.  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$
2.  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$  (identité du parallélogramme)
3.  $(x|y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$

**Preuve.**

Calculs directs. ■

**I.2.3 Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire et  $u, v \in E$ . Alors

$$|(u|v)| \leq \|u\| \|v\|$$

Il y a égalité si et seulement si  $u$  et  $v$  sont colinéaires.

**Preuve.**

Soient  $u, v \in E$  fixés.

On considère l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto (u + tv|u + tv) \end{cases}$ .

Alors  $f \geq 0$  par positivité du produit scalaire. De plus, pour  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} f(t) &= (u + tv|u + tv) = (u|u + tv) + t(v|u + tv) = (u|u) + t(u|v) + t(v|u) + t^2(v|v) \\ &= \|u\|^2 + 2t(u|v) + t^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est une fonction polynomiale de degré au plus 2.

— Si  $v \neq 0$  (ie  $\|v\| \neq 0$ ), alors  $f$  est polynomiale de degré 2 et positive. Donc son discriminant est négatif :  $\Delta = 4(u|v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$ , ce qui est l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

— Si  $v = 0$ , alors  $(u|v) = 0$  et donc l'inégalité est vérifiée.

Dans le cas,  $v \neq 0$ , l'inégalité est une égalité ssi  $\Delta = 0$  ssi  $f$  s'annule une fois ssi  $\exists t \in \mathbb{R} u + tv = 0$  (norme nulle). Ainsi  $u$  et  $v$  sont colinéaires

Dans le cas  $v = 0$ , l'égalité est tout le temps vérifié, tout comme le fait d'être colinéaire à 0. ■

**I.2.4 Exemple**

1. Soient  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Alors  $\left| \int_a^b fg \right| \leq \int_a^b |fg| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}$ .

exo : appliquer à  $f : t \mapsto t^{-\alpha}, g : t \mapsto t^{\alpha-1}$  pour  $\alpha \neq \frac{1}{2}$  pour retrouver le théorème de croissances comparées.

2.  $\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2} \sqrt{\frac{2n+1}{3}}$ .

**I.2.5 Exercice**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions dont le carré est intégrable sur  $I$ . Montrer que  $(f, g) \mapsto \int_I fg$  définit bien un produit scalaire sur  $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$ . On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour prouver que  $fg$  est intégrable sur  $I$ .

**I.2.6 Corollaire (Minkowski)**

Soient  $u, v \in E$  (où  $E$  est encore un espace préhilbertien).

- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  avec égalité ssi  $u$  et  $v$  sont colinéaires de même sens (positivement proportionnels).
- $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$

**Preuve.**

On a immédiatement, d'après Cauchy-Schwarz

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Comme la fonction racine carré est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on a l'inégalité voulue.

Il y a égalité ssi  $(u|v) = \|u\|\|v\|$ . Dans ce cas, on a d'après le théorème I.2.3,  $u = \lambda v$  ou  $v = 0$  et donc  $\lambda\|v\|^2 = |\lambda|\|v\|^2$ , ie  $v = 0$  ou  $\lambda \geq 0$ . Dans les deux cas,  $u$  et  $v$  sont colinéaires de même sens. La réciproque est immédiate par le même calcul.

Pour le deuxième point, on applique l'inégalité triangulaire à  $\|(u - v) + v\|$  et à  $\|(v - u) + u\|$ . ■

**Remarque**

Faire un dessin : inégalité triangulaire.

**Propriétés de la norme**

Soit  $u \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- $\|u\| = 0 \iff u = 0$
- $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Toutes les applications qui ont ces trois propriétés sont appelées normes.

**I.2.7 Définition-Proposition**

Soit  $E$  un espace préhilbertien. La **distance** associée au produit scalaire de  $E$  est l'application  $d : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto \|x - y\| \end{cases}$ .

Elle possède les propriétés suivantes.

- $\forall (x, y) \in E^2 d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie)
- $\forall (x, y) \in E^2 d(x, y) \geq 0$  et  $(d(x, y) = 0 \iff x = y)$  (séparation).
- $\forall (x, y, z) \in E^3 d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

## II Orthogonalité

### II.1 Familles orthogonales

#### II.1.1 Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soient  $u, v, u_1, \dots, u_n \in E$

1. On dit que  $u$  est unitaire, ou normé ssi  $\|u\| = 1$ .
2.  $u$  et  $v$  sont dits orthogonaux ssi  $(u|v) = 0$ . On note  $u \perp v$ .
3.  $(u_1, \dots, u_n)$  est dite orthogonale ssi les  $u_i$  sont orthogonaux deux à deux.
4.  $(u_1, \dots, u_n)$  est dite orthonormale ssi elle est orthogonale et tous les  $u_i$  sont unitaires. Autrement dit  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$   $(u_i|u_j) = \delta_{i,j}$ .

**Explication** La notion d'orthogonalité repose maintenant sur le produit scalaire, contrairement à la géométrie de début d'année. On a pas du tout de notion d'angle.

#### ATTENTION

Deux vecteurs sont orthogonaux pour un produit scalaire donnée, et pas forcément pour le produit scalaire voisin...

#### II.1.2 Exemple

Montrer que la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est orthonormale pour le produit scalaire canonique.

Montrer que  $1$  et  $t \mapsto \sin(2\pi t)$  sont orthogonales pour le produit scalaire que l'on connaît sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

#### Passer à une famille orthonormale

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs orthogonaux tous non nuls. Alors  $(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|})$  est une famille orthonormale.

#### II.1.3 Proposition

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux et **tous non nuls**. Alors  $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est libre.

#### Preuve.

Supposons que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E$ . Alors en effectuant le produit scalaire par  $u_i$  on obtient  $\lambda_i \|u_i\|^2 = 0$ , d'où  $\lambda_i = 0$ . ■

#### Remarque

On peut supposer que la famille  $(u_i)$  est une famille infinie et faire la même preuve pour toute sous-famille finie. Ainsi la proposition précédente est valable pour une famille quelconque.

#### II.1.4 Théorème (Pythagore)

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille orthogonale d'un espace préhilbertien.

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

#### Preuve.

Simple calcul de bilinéarité. ■

## II.2 Bases orthonormées

**II.2.1 Théorème**

Soit  $E$  un espace euclidien (donc  $E$  est de dimension finie) et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base **orthonormale** de  $E$ . Soient  $x, y \in E$ .

1.  $x = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$ , c'est à dire que la coordonnée<sup>1</sup> de  $x$  sur le vecteur  $e_i$  est  $(x|e_i)$ .
2. On note  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  les coordonnées de  $y$  dans  $\mathcal{B}$ . Alors

$$(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$$

3. Si on note  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  et  $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$  (les colonnes des coordonnées),  $(x|y) = {}^tXY$ .

**Preuve.**

1. On a  $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ . Ainsi  $(x|e_1) = x_1(e_1|e_1) + x_2(e_2|e_1) + \dots + x_n(e_n|e_1) = x_1$  (par linéarité du produit scalaire et orthogonalité de la famille).
2. On a par le même calcul  $(x|y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j (e_i|e_j) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  car tous les autres termes sont nuls. ■

**II.2.2 Exemple**

Montrer que la famille  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$  est une base orthonormale directe de  $\mathbb{R}^2$  (pour le produit scalaire canonique).

Donner les coordonnées de  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dans cette base. Faire le lien avec les matrices de passage.

**II.2.3 Corollaire**

Soit  $E$  un espace euclidien et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base **orthonormée** de  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

Alors  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$   $a_{i,j} = (f(e_j)|e_i)$ .

**Preuve.**

On a en effet, pour un  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  fixé  $f(e_j) = \sum_{i=1}^n (f(e_j)|e_i)e_i$  d'après le théorème précédent. ■

**Mnémotechnie**

Pour calculer la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$ , *a priori* on calcule la coordonnée de  $f(e_j)$  pour trouver la  $j$ ème colonne. Utile pour se souvenir sur quel indice porte l'application de  $f$ .

**II.3 Créer des bases orthogonales ou orthonormales**

**II.3.1 Théorème (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)**

Soit  $E$  un espace euclidien et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors il existe une base  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $E$  vérifiant

- $(u_1, \dots, u_n)$  est orthogonale
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .

On peut imposer  $\|u_i\| = 1$ , c'est à dire que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  soit orthonormale (il suffit de diviser  $u_i$  par  $\|u_i\| \neq 0$ ). Si on impose de plus que  $(e_k|u_k) > 0$  pour tout  $k$ , alors la famille obtenue est unique.

**Preuve.**

Dessin

On note  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et on pose  $P_k$  : "il existe une famille orthogonale  $(u_1, \dots, u_k)$  telle que  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = F_k$ "

- $P_1$  est clairement vraie, il suffit de poser  $u_1 = e_1$ . (ou  $\frac{e_1}{\|e_1\|}$ ).

Il existe clairement un seul vecteur de  $\text{Vect}(e_1)$  de norme 1 et tel que  $(u_1|e_1) > 0$ , et c'est  $\frac{e_1}{\|e_1\|}$  (et on a  $(e_1|u_1) = \|e_1\| > 0$ ).

— Soit  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , on suppose que  $P_k$  est vraie.

On remarque d'abord que  $e_{k+1} \notin F_k$ , d'après la liberté de la famille  $(e_i)_i$ . On cherche  $u_{k+1}$  sous la forme  $e_{k+1} - x$ , avec  $x \in F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ . On écrit donc  $x = \sum_{i=1}^k \alpha_{ik} u_i$ . On veut maintenant

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket (e_{k+1} - x | u_i) = 0 \text{ ie } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket (e_{k+1} | u_i) - \alpha_{ik} \|u_i\|^2 = 0$$

On pose donc  $u_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(e_{k+1} | u_i)}{\|u_i\|^2} u_i \neq 0$  car  $e_{k+1} \notin F_k$ . C'est un vecteur de  $F_{k+1}$  mais pas de  $F_k$ , donc  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) = F_{k+1}$ .

Tout vecteur de  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$  qui n'est pas dans  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  s'écrit  $\lambda e_{k+1} - x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et  $x \in F_k$ . Ainsi d'après le calcul précédent tout vecteur orthogonal à tous les  $u_i$  pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  est de la forme  $\lambda u_{k+1}$ . Il existe un seul vecteur de norme 1 et tel que  $(u | e_{k+1}) > 0$  dans  $\mathbb{R}f_{k+1}$ , c'est le vecteur  $\pm \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$  (le signe étant choisi pour garder le produit scalaire positif).

— Par récurrence, une base orthogonale de  $E$  existe. ■

### En pratique

Il faut connaître le résultat général, et savoir appliquer pour de "petites familles". Pour savoir appliquer, il faut retenir la forme sous laquelle on cherche chaque vecteur.

#### II.3.2 Exemple

Soit  $E = \mathbb{R}^3$ . On munit cet espace du produit scalaire canonique. Transformer  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  en une BON.

#### II.3.3 Exemple

On munit  $\mathbb{R}_3[X]$  du produit scalaire  $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ . Donner une base orthonormée de  $\mathbb{R}_3[X]$  qui soit échelonnée en degré.

#### Remarque

1. Tout espace euclidien admet une BON.
2. Le procédé de Gram-Schmidt ne change pas une famille orthogonale (sauf à la normaliser si on veut obtenir une BON).

#### Remarque

Si on orthonormalise  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{B}'$ , la condition de conservation des espaces vectoriels croissants assure que  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  (la matrice de passage) est triangulaire supérieure.

#### II.3.4 Corollaire

Dans un espace euclidien on peut compléter toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (resp. orthonormale) en une base orthogonale (resp. orthonormale).

##### Preuve.

Base incomplète + Gram-Schmidt qui ne change pas les familles orthogonales. ■

## III Espaces orthogonaux

$E$  est toujours un espace préhilbertien.

### III.1 Orthogonal d'un sev

#### III.1.1 Définition

Deux sous-espaces  $F, G$  de  $E$  sont dits orthogonaux ssi  $\forall (x_F, x_G) \in F \times G (x_F | x_G) = 0$ .

On dit que  $x \in E$  est orthogonal à  $F$  ssi  $\forall x_F \in F (x | x_F) = 0$

#### III.1.2 Exemple

Trouver un exemple dans  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire canonique. Preuve avec les bases, avec les équations.

#### Remarque

Il suffit de vérifier l'orthogonalité deux à deux de familles génératrices (ou de bases) de  $F$  et  $G$ .



**Remarque**

En particulier,  $x \in E$  est orthogonal à  $F$  si  $x \perp f_i$  pour tout  $i$  où  $F$  est engendré par les  $f_i$ .

**III.1.3 Définition**

Soit  $F$  un sev de  $E$ . L'orthogonal de  $F$  est  $F^\perp = \{x \in E \mid \forall x_F \in F (x_F|x) = 0\}$ .  $F^\perp$  est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de  $F$ .

**III.1.4 Exemple**

1.  $\{0\}^\perp = E, E^\perp = \{0\}$ .
2. Calculer l'orthogonal de la droite d'équation  $y = x$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Attention**

On considère  $D$  une droite de l'espace et  $F$  un sev de  $\mathbb{R}^3$ . On peut avoir  $D \perp F$  sans que  $F = D^\perp$ . En particulier deux droites peuvent être orthogonales, mais l'orthogonal de  $D$  est un plan.

**III.1.5 Proposition**

Soit  $F$  un sev de  $E$ .

1.  $F^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et la somme  $F + F^\perp$  est directe.
2. Si  $F$  est de dimension finie alors  $F \oplus F^\perp = E$  ie  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Preuve.**

1. On a déjà clairement  $0 \in F^\perp$ , qui est donc non vide. De plus, la linéarité (à gauche par exemple) du produit scalaire nous assure immédiatement que  $F^\perp$  est stable par combinaison linéaire.

De plus, si  $x \in F \cap F^\perp$  alors  $x \perp x$  ie  $(x|x) = 0$  et donc  $x = 0_E$ . Ainsi la somme (d'espaces) est directe.

2. Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$  que l'on peut supposer orthonormale (quitte à lui appliquer Gram-Schmidt). Soit  $x \in E$ .

— Analyse. Supposons que l'on ait  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in F$  et  $x_2 \perp F$ . Alors pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $(x|e_i) = (x_1|e_i)$  car  $(x_2|e_i) = 0$ . Ainsi  $x_1 = \sum_{i=1}^p (x_1|e_i)e_i = \sum_{i=1}^p (x|e_i)e_i$  (d'après II.2.1, car  $F$  est un espace euclidien)

— Synthèse. Posons  $x_1 = \sum_{i=1}^p (x|e_i)e_i$  et  $x_2 = x - x_1$ . Alors par construction,  $x_1 \in F$ . Montrons que  $x_2 \perp F$  ie  $x_2$  est orthogonal à une base de  $F$ .

Or, pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $(x_2|e_j) = (x|e_j) - (x_1|e_j) = 0$  car

$$(x_1|e_j) = \sum_{i=1}^p (x|e_i) \underbrace{(e_i|e_j)}_{=\delta_{i,j}}$$

Finalement, la somme directe  $F \oplus F^\perp$  contient  $E$  donc  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires. ■

**III.1.6 Exercice**

1.  $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
2.  $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$

**En dimension finie**

Si  $E$  est un espace euclidien (de dimension finie), alors tout sous espace est de dimension finie.

1.  $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ .
2. La concaténation d'une BON de  $F$  et d'une BON de  $F^\perp$  est une BON de  $E$ .
3. Réciproquement, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une BON de  $E$  telle que  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$  (indice : on a appliqué Gram-Schmidt à une base de  $F$  complétée en une base de  $E$ ), alors  $F^\perp = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ .

**III.1.7 Exemple**

1. Calculer le supplémentaire orthogonal de  $D : 2x - y = 0$  (dans  $\mathbb{R}^2$ ).
2. Dans  $\mathbb{R}^3$ , même question avec  $D = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $P : 2x + z = 0$ .

## III.2 Projections et symétries orthogonales

### III.2.1 Définition

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace de dimension finie de  $E$ .

1. La projection orthogonale sur  $F$  est la projection sur  $F$  parallèlement à (de direction)  $F^\perp$ .
2. La symétrie orthogonale sur  $F$  est la symétrie par rapport à  $F$  de direction  $F^\perp$ .

### Remarque

1. On a bien  $E = F \oplus F^\perp$ ...
2. On pourra se souvenir de la formule  $s = 2p - Id$  pour lier les deux objets précédents.
3. pour  $x \in E$ , on a les deux conditions géométriques  $p_F(x) \in F$  et  $x - p_F(x) \in F^\perp$ .

### III.2.2 Exemple

Matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur  $\mathcal{D} : 2x - y = 0$ .

### III.2.3 Proposition

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace de dimension finie de  $E$  dont une BON est  $(u_1, \dots, u_r)$ . On note  $p_F$  le projecteur orthogonal sur  $F$ . Alors

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^r (x|u_i)u_i$$

En particulier, si  $F = \text{Vect}(u)$  est une **droite**,  $p_F(x) = (x|u)u$  où  $u$  est **de norme 1**.

### Preuve.

Il s'agit d'un re-formulation de la preuve de III.1.5 ■

### Méthode

1. On essaie de déterminer  $p_F(x)$  en remarquant que

$$\begin{aligned} p_F(x) &\in F \\ x - p_F(x) &\perp F \end{aligned}$$

donc est orthogonal à une base de  $F$ .

2. On utilise la formule  $p_F(x) = \sum_{i=1}^r (x|f_i)f_i$  si on connaît une BON de  $F$ .

### III.2.4 Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est appelée retournement, et une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelé réflexion.

### Réduction

Matrice, trace, det dans des bases adaptées.

### III.2.5 Exemple

Dans  $\mathbb{R}^3$  on pose :  $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ . Calculer les matrices dans la base canonique des projection orthogonales sur  $F$  et symétrie orthogonales par rapport à  $F$ .

### III.2.6 Proposition (Inégalité de Bessel)

Soit  $F$  un sous-espace de dimension finie de  $E$ . On note  $p_F$  le projecteur orthogonal sur  $F$ .

$$\forall x \in E \quad \|p_F(x)\| \leq \|x\|$$

**Preuve.**

Soit  $x \in E$ . On a  $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$  et donc d'après le théorème de Pythagore,  $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$ . On conclut en remarquant qu'un carré de réel est toujours positif et que la fonction racine carrée est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . ■

**III.2.7 Exercice**

Montrer que cette propriété caractérise les projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs. Plus précisément, si  $p \in \mathcal{L}(E)$  est un projecteur de  $E$  on a

$$\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\| \iff p \text{ est un projecteur orthogonal}$$

Indication : on pourra poser un vecteur non nul  $x$  du noyau de  $p$  et considérer la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(x)$ .

**III.2.8 Théorème (Moindres carrés)**

Soit  $F$  un sous-espace de dimension finie de  $E$ . Pour  $x \in E$ , on note  $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$  la distance de  $x$  à  $F$ .

Il existe un unique  $x_0 \in F$  tel que  $d(x, F) = d(x, x_0) = \|x - x_0\|$  et donc la borne inférieure est en fait un minimum.  $x_0$  est le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$ .

**Preuve.**

Notons  $x_0 = p_F(x)$  le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$ . Alors  $x_0 \in F$  et donc  $d(x, F) \leq d(x, x_0)$ .

De plus, si  $y \in F$  alors  $x - y = x - x_0 + x_0 - y$  et donc  $\|x - y\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2$  car  $\underbrace{x - x_0}_{\in F^\perp} \perp x_0 - y$

et d'après le théorème de Pythagore.

Ainsi pour tout  $y \in F$   $d(x, y) \geq d(x, x_0)$  et donc  $d(x, F) = d(x, x_0)$ . Le calcul précédent montre que ce minimum n'est atteint qu'en  $x_0$ . ■

**Remarques**

1. Ce théorème donne avant tout l'existence d'un minimum.
2. Avec les notations de la preuve,  $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$  (toujours d'après Pythagore). Ainsi, on a un moyen pratique de calculer la valeur de ce minimum, il s'agit de calculer une projection orthogonale.

**Traduction dans une BON**

Soit  $(e_1, \dots, e_r)$  une BON de  $F$

1. Alors  $p_F(x) = \sum_{i=1}^r (x|e_i)e_i$ .
2.  $d(x, F) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^r (x|e_i)^2$ .

**III.2.9 Exemple**

Calculer  $\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 dt$ . Il s'agit de calculer, dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  munit du produit scalaire intégrale, le projeté de l'exponentielle sur le sous espace des fonctions affines (qui est de dimension 2).

**IV Automorphismes orthogonaux**

Le cadre ici est celui des espaces euclidiens, et plus particulièrement des espaces euclidiens de petites dimension.  $E$  sera donc toujours un espace euclidien et on abusera sans retenue du théorème II.2.1 de calcul des coordonnées dans une base orthonormée.

**IV.1 Isométries****IV.1.1 Définition-Proposition**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  une application linéaire. On a équivalence entre

1.  $f$  conserve le produit scalaire ie  $\forall x, y \quad (f(x)|f(y)) = (x|y)$
2.  $f$  conserve la norme, ie  $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|$ .

Dans ce cas,  $f$  est bijective et est appelé automorphisme orthogonal ou encore isométrie vectorielle. L'ensemble des automorphismes orthogonaux de  $E$  est noté  $O(E)$ .

**Preuve.**

- $1 \Rightarrow 2$  C'est évident. On pourrait prouver que si  $f$  n'est pas forcément linéaire mais conserve le produit scalaire, alors elle est linéaire.
- $2 \Rightarrow 1$  On a pour tous  $x, y \in E$

$$\begin{aligned} (f(x)|f(y)) &= \frac{1}{2}(\underbrace{\|f(x) + f(y)\|^2}_{=f(x+y)} - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = (x|y) \end{aligned}$$

Comme  $f$  conserve la norme, on a  $f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$  donc  $f$  est injective donc bijective car  $E$  est de dimension finie. ■

**IV.1.2 Exemple**

1. L'identité est clairement dans  $O(E)$ .
2. Toute symétrie orthogonale est dans  $O(E)$ . Le vérifier en revenant à la définition  $s(x) = x_F - x_G$  avec  $x_F \perp x_G$ .
3. Les projections sur tout sous-espace strict ne sont pas des automorphismes (noyau non trivial).

**Valeurs propres**

Soit  $f \in O(E)$ . On suppose que  $f$  possède une valeur propre réelle  $\lambda$ . Alors pour un vecteur propre  $x \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$ ,  $\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ . Mais  $\|f(x)\| = \|x\|$  donc  $\lambda = \pm 1$  car  $\|x\| \neq 0$ .

**IV.1.3 Proposition**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1.  $f \in O(E)$
2. L'image de toute BON de  $E$  par  $f$  est une BON de  $E$ .
3. L'image d'une certaine BON de  $E$  par  $f$  est encore une BON de  $E$ .

**Preuve.**

- $1 \Rightarrow 2$  Trivial par conservation du ps
- $2 \Rightarrow 3$  ...
- $3 \Rightarrow 1$  Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une telle BON et  $x, y \in E$  de coordonnées respectives  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  dans  $\mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} (f(x)|f(y)) &= \left( \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \mid \sum_{j=1}^n y_j f(e_j) \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j (f(e_i)|f(e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x|y) \end{aligned}$$

d'après II.2.1 ■

**IV.1.4 Exemple**

Montrer que l'application  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta x - \sin \theta y \\ \sin \theta x + \cos \theta y \end{pmatrix}$  est orthogonale.

**IV.1.5 Proposition**

La composition de deux isométries est encore une isométrie, et l'inverse (bijection réciproque) d'une isométrie est encore une isométrie.

**Preuve.**

Rappel :  $O(E)$  contient l'identité.

Soit  $f \in O(E)$ , alors pour tous  $x, y \in E$  on a  $\underbrace{(f^{-1}(x)|f^{-1}(y))}_u = (f(u)|f(v)) = (x|y)$ . La conservation du ps par la composée de deux automorphismes orthogonaux est aussi facile à établir... ■

**IV.1.6 Exercice**

Dans  $E$  euclidien, soit  $F$  un sous-espace et  $f \in O(E)$ . Montrer que  $f(F)^\perp = f(F^\perp)$ . (inclusion facile + dimension qui est conservée par les iso)

**IV.1.7 Proposition**

Soit  $f \in O(E)$ . Si  $F$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $f$  (ie  $f(F) \subset F$ ) alors  $F^\perp$  est stable par  $f$ .

**Preuve.**

Supposons que  $F$  est stable par  $f$  et soit  $x \in F^\perp$ . On doit montrer que  $f(x) \in F^\perp$ .

Soit donc  $y \in F$ . Montrons que  $(f(x)|y) = 0$ . Or  $(f(x)|y) = (x|f^{-1}(y))$ . De plus,  $f$  est bijective donc  $f(F) = F$  (égalité des dimensions). Ainsi  $f^{-1}(y) \in F$  et donc  $(x|f^{-1}(y)) = 0$ .

Finalement,  $f(x) \in F^\perp$ . ■

**IV.2 Matrices orthogonales****IV.2.1 Définition**

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $M$  est orthogonale ssi l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$  est orthogonal. On note  $O(n)$  ou  $O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonale de taille  $n$

**IV.2.2 Théorème**

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $M \in O_n(\mathbb{R})$ .
2.  ${}^tMM = I_n$  et  $M{}^tM = I_n$ .
3.  ${}^tM \in O_n(\mathbb{R})$ .
4. Les colonnes de  $M$  sont une BON de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  pour le produit scalaire canonique.
5. Les lignes de  $M$  sont une BON de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  pour le produit scalaire canonique.

**Preuve.**

1. On commence par prouver  $1 \iff 2$ .

Si  $M \in O_n(\mathbb{R})$  on a alors

$$\forall X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})(MX|MY) = (X|Y) = {}^tX{}^tMMY = {}^tXY$$

Appliquons ceci à  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

On note  $A = {}^tMM$ . Alors  $AE_i$  est la  $i$ ème colonne de  $A$  et  $(E_j|C)$  est la  $j$ ème coordonnée de  $C$  donc  ${}^tE_jAE_i$  est exactement  $a_{ij}$ . Donc  $a_{ij} = \delta_{i,j}$  pour tous  $i$  et  $j$  et finalement  $A = I_n$

Maintenant qu'on a  ${}^tMM = I_n$  il suffit de transposer pour trouver  $M{}^tM = I_n$ .

Réciproquement si  ${}^tMM = I_n$  alors on a clairement  $(MX|MY) = (X|Y)$  pour tous  $X, Y$  et donc l'alca à  $M$  est orthogonale.

2.  $M \in O_n(\mathbb{R}) \iff {}^tMM = I_n \iff M{}^tM = I_n \iff {}^tM \in O_n(\mathbb{R})$ .
3. L'image par un auto orthogonal d'une BON est une BON, donc les colonnes de  $M$  qui sont l'image de la base canonique forment une BON.
4. Passage à la transposée. ■

**IV.2.3 Exemple**

1.  $I_n$ ,  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^{-1}$ .

$$2. \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Quelle est la méthode la plus efficace pour vérifier qu'une matrices est orthogonale ?

#### IV.2.4 Proposition

Soit  $E$  un espace euclidien, soit  $\mathcal{B}$  une **base orthonormée** de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $E$ . On note  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

Alors  $\mathcal{B}'$  est une BON ssi  $P \in O_n(\mathbb{R})$ .

#### Preuve.

On sait qu'on peut utiliser l'expression du ps canonique de  $\mathbb{R}^n$  a condition de se placer dans une BON de  $E$  et c'est ici le cas. Voir II.2.1 ■

#### IV.2.5 Exemple

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 2, et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  une base orthonormale. Montrer que  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$  avec  $f_1 = \frac{4e_1+3e_2}{5}$  et  $f_2 = \frac{-3e_1+4e_2}{5}$  est une BON de  $E$ .

#### Changement de bases orthonormales

Soit  $E$  un eve de  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux BON de  $E$ . On note  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ .

1.  $P^{-1} = {}^tP = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ .
2. Soit  $x \in E$  et  $X$  le vecteur de ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$ ,  $X'$  ses coordonnées dans  $\mathcal{B}'$ . On a  $X = PX'$  et  $X' = {}^tPX$ .
3. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ . Alors  $M' = {}^tPMP$ .

#### IV.2.6 Exemple

Dans  $\mathbb{R}^2$  on passe de la base canonique à la base  $u_\theta, v_\theta$ . Donner les changements de coordonnées.

#### IV.2.7 Proposition

L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale et le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale.

#### Preuve.

Si  $A \in O_n(\mathbb{R})$  alors  ${}^tA = A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ . Si on a également  $B \in O_n(\mathbb{R})$  alors  $AB^t(AB) = AB^tB^tA = AI_n{}^tA = I_n$  de donc  $AB$  est orthogonale. ■

#### Interprétation géométrique

Si  $M \in O_n(\mathbb{R})$  alors  $M$  est la matrice d'une BON dans la base canonique qui est orthonormale. Ainsi  $M^{-1}$  est la matrice de la base canonique dans une BON et est donc une matrice orthogonale.

#### IV.2.8 Proposition

Soit  $E$  un espace euclidien.

1. Soit  $\mathcal{B}$  une BON de  $E$  et  $f \in O(E)$ . Alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est orthogonale.
2. Réciproquement si  $A \in O_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{B}$  est une BON quelconque de  $E$  alors l'endomorphisme  $f$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$  est orthogonal.

#### Preuve.

1. Notons  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ . On doit montrer que  $M \in O_n(\mathbb{R})$ .

Soient  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . on note  $C_i, C_j$  les colonnes de  $M$  correspondantes et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Alors  $(C_i|C_j) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_i))|\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_j))) = (f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$  d'après II.2.1 et car  $f$  est une isométrie. On utilise deux fois le fait que  $\mathcal{B}$  est orthonormée.

2. Avec les mêmes notations,  $(f(e_i)|f(e_j)) = (C_i|C_j) = \delta_{i,j}$  d'après IV.2.2. ■

**Explication** À condition de se placer dans une BON, on peut passer des endomorphismes orthogonaux aux matrices orthogonales.

#### IV.2.9 Proposition

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base **orthonormée** de  $E$ . On note  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

$$M \text{ est symétrique et } f \in O(E) \iff f \text{ est une symétrie orthogonale}$$

#### Preuve.

Si  $M$  est symétrique on a à la fois  ${}^tM = M$  et  ${}^tM = M^{-1}$ . Ainsi  $f$  est une symétrie. Montrons que  $\ker(f - Id_E) \perp \ker(f + Id_E)$ . Soient  $x_1, x_2 \in E \setminus \{0_E\}$  tels que  $f(x_1) = x_1$  et  $f(x_2) = -x_2$  (des vecteurs propres). Montrons que  $x_1 \perp x_2$ . Or  $f$  est une isométrie, donc  $(x_1 | x_2) = (f(x_1) | f(x_2)) = (x_1 | -x_2) = -(x_1 | x_2)$  et donc  $(x_1 | x_2) = 0$ . Finalement la symétrie  $f$  est bien orthogonale.

Réciproquement, supposons que  $f$  est une symétrie orthogonale. Alors  $M = M^{-1}$ . De plus,  $M$  est une matrice orthogonale d'après la proposition précédente, donc  $M^{-1} = {}^tM$ . ■

### Matrices symétriques

Si  $M \in O_n(\mathbb{R})$  est symétrique, alors c'est la matrice canoniquement associée à une symétrie orthogonale.

#### IV.2.10 Théorème

Soit  $f \in O(E)$  et  $M \in O_n(\mathbb{R})$ . Alors  $\det(f) = \pm 1$ ,  $\det(M) = \pm 1$

#### Preuve.

Il suffit de le prouver pour  $M$ , car la matrice de  $f$  dans une BON de  $E$  est une matrice orthogonale.

Or  $\det(M) = \det({}^tM)$  et  ${}^tM = M^{-1}$ . Ainsi  $\det(M) = \frac{1}{\det(M)}$  et finalement  $\det(M) = \pm 1$ . ■

#### IV.2.11 Définition

1. L'ensemble des isométries de  $E$  de déterminant 1 est noté  $SO(E)$  et appelé groupe spécial orthogonal de  $E$ .  $f \in SO(E)$  est dite positive (et si  $\det(f) = -1$ , on dira que  $f$  est une isométrie négative)
2.  $SO_n(\mathbb{R})$  (aussi noté  $SO(n)$ ) est l'ensemble  $\{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}$ .

#### IV.2.12 Exercice

Montrer que  $SO(n)$  est stable par produit et passage à l'inverse.

#### IV.2.13 Définition

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que cette base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif (c'est à dire vaut 1 dans le cas d'une base orthonormée).

On dit qu'elle est indirecte sinon.

#### IV.2.14 Proposition

Effectuer un changement de base entre deux bases orthonormées directes ne modifie pas les déterminants (des familles ni des applications linéaires).

On retrouve ici la notion de produit mixte vu en géométrie de 1ère année. On peut calculer le déterminant d'une famille dans n'importe quelle base orthonormée directe.

#### Preuve.

SI  $M$  est la matrice d'une famille dans une première BOND, la matrice dans la nouvelle BOND est  $M' = PM$ . Comme  $\det(P) = 1$ ,  $\det(M') = \det(M)$ . ■

## V Matrices symétriques réelles

### V.1 Lien avec le produit scalaire

Rappel : Pour  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire canonique peut se calculer par  $(X|Y) = {}^tXY$ .

#### V.1.1 Définition

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite symétrique ssi  ${}^tA = A$ . L'ensemble des matrices symétriques de taille  $n$  est noté  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . C'est un espace vectoriel de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

#### V.1.2 Exemple

Rappel : le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est  $(A|B) = \text{tr}({}^tAB)$ . Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  (en semble des matrices antisymétriques).

On peut ainsi interpréter la transposition comme la symétrie orthogonale par rapport à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

#### V.1.3 Exercice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $P \in O_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A$  est symétrique ssi  ${}^tPAP$  est symétrique.

#### V.1.4 Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  ssi pour tous  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ,  $(AX|Y) = (X|AY)$  (pour le produit scalaire canonique).

#### Preuve.

1. Si  $A$  est symétrique, alors  $(AX|Y) = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tXAY = (X|AY)$  pour tout  $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ .
2. Réciproquement, supposons que pour tous  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ,  $(AX|Y) = (X|AY)$  ie  ${}^tX{}^tAY = {}^tXAY$  Montrons que  ${}^tA = A$ .

On a, pour tout  $X, Y$ ,  ${}^tX({}^tA - A)Y = 0$  ou encore  $(X|({}^tA - A)Y) = 0$ . Ainsi, pour  $Y$  fixé,  $({}^tA - A)Y$  est orthogonal à tout vecteur de  $\mathbb{R}^n$  donc est nul. On a donc  $\forall Y \in \mathbb{R}^n$   $({}^tA - A)Y = 0$  et donc  $({}^tA - A)$  est d'image nulle. C'est la matrice nulle.

On a prouvé de manière plus générale que  $(X|AY) = ({}^tAX|Y)$  et  $(AX|Y) = (X|{}^tAY)$ . ■

#### V.1.5 Théorème

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

1. Les valeurs propres de  $A$  sont réelles.
2. Si  $X_1, X_2$  sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes, alors  $X_1 \perp X_2$ . Autrement dit, les sous espaces propres de  $A$  sont orthogonaux deux à deux.

#### Preuve.

1. Hors programme. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A$  (c'est possible dès que  $n \geq 1$  d'après le théorème de

d'Alembert-Gauss). Soit  $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$  un vecteur propre associé. Alors  $AX = \lambda X$ .

Alors  $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$  car  $A$  est à coefficients réels (reprendre la formule de produit matriciel, et conjuguer chaque terme). On a alors  ${}^t(AX)\bar{X} = \lambda X\bar{X} = \lambda \sum_{i=1}^n |z_i|^2$ . De plus,  ${}^t(AX)\bar{X} = {}^tX A\bar{X} = \bar{\lambda} {}^tX\bar{X} = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |z_i|^2$ .

Comme  $\sum_{i=1}^n |z_i|^2 > 0$  on a bien  $\bar{\lambda} = \lambda$ .

2. Calculons  $(AX_1|X_2)$  de deux manières. On a d'une part  $(AX_1|X_2) = \lambda_1(X_1|X_2)$  et d'autre part  $(AX_1|X_2) = (X_1|AX_2) = \lambda_2(X_1|X_2)$ . Ainsi  $(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1|X_2) = 0$  et comme  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $(X_1|X_2) = 0$ . ■

## V.2 Théorème spectral



**V.2.1 Théorème**

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique réelle. Alors  $A$  est diagonalisable (dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ) dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice **orthogonale**  $P$  telles que  $A = PDP^{-1} = PD^tP$ .

**Preuve.**

Hors programme.

Le polynôme  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  car les valeurs propres de  $A$  sont réelles. Notons  $T$  une matrice triangulaire supérieure semblable à  $A$  via la matrice de passage  $P : T = P^{-1}AP$ . Toutes les matrices sont à coefficients réels.

On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base  $\mathcal{B}$  des colonnes de  $P$  pour obtenir une famille orthonormale  $\mathcal{B}'$  de matrice  $O$  dans la base canonique. Alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}') = \Delta O$  où  $\Delta$  est triangulaire supérieure et  $O$  orthogonale.

On obtient  $T = \Delta^{-1}O^{-1}AO\Delta$  ie  $\Delta T \Delta^{-1} = {}^tOAO$  est à la fois une matrice symétrique et triangulaire supérieure. Elle est donc diagonale et  $A$  est semblable à une matrice diagonale!

**Remarque**

Si  $A$  est symétrique et  $f$  est son endomorphisme canoniquement associé, il existe une BON dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

**V.2.2 Exemple**

Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  est diagonalisable et la diagonaliser.

**V.2.3 Exemple**

Diagonaliser dans une BON la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  et donner l'interprétation géométrique de la matrice de passage.



# Chapitre 12

## Probabilités

### I Cadre théorique

#### I.1 Ensembles dénombrables

##### I.1.1 Définition

Soit  $E$ . On dit que  $E$  est dénombrable ssi il existe une application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$  bijective. En d'autres termes, on peut écrire  $E = \{x_0, x_1, \dots\}$  sans oublier un seul élément.

##### Fini ou dénombrable

Les ensembles finis ou dénombrables sont exactement les ensembles pour lesquels on peut numéroter les éléments, ou encore les décrire sous la forme  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  (quitte à prendre une infinité de fois la même valeur pour  $x_n$  dans le cas des ensembles finis).

##### I.1.2 Théorème

1.  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  est dénombrable.
2.  $\mathbb{Z}$  est dénombrable.
3.  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sont dénombrables.
4. Si  $E$  et  $F$  sont dénombrables alors  $E \times F$  est dénombrable.

##### Preuve.

1. Encore heureux !  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$  est une bijection convenable.
2. Exhibons une bijection de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$ . On pose

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ 2 \times (-n) + 1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{cases} .$$

$\varphi$  est une bijection. Pour le prouver on peut soit examiner l'injectivité et la surjectivité, soit exhiber sa réciproque.

3. cf 4.
4. Notons  $E = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  et  $F = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . L'idée ici est d'énumérer tous les éléments de  $E \times F$  "par diagonale" : on représente  $E$  sur l'axe des abscisses,  $F$  sur l'axe des ordonnées (un élément de chaque sur chaque entier,  $e_0, f_0$  situés en 0).

On énumère les éléments de  $E \times F$  de la manière suivante : pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on part de  $(e_k, f_0)$  (graphiquement sur l'axe des abscisses), puis on considère  $(e_{k-1}, f_1), (e_{k-2}, f_2) \dots (e_0, f_k)$ .

Plus précisément, si  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , on note  $k = i + j$  et alors on a déjà rempli  $k$  diagonales dont numéroté

$\sum_{p=1}^k p = \frac{k(k+1)}{2}$  éléments, et  $(e_i, f_j)$  est l'élément numéroté  $\frac{k(k+1)}{2} + j$  (on vient de créer la bijection...) ■

**Remarque**

On doit pouvoir prouver que tout ensemble inclus dans un ensemble dénombrable est fini ou dénombrable. Ainsi  $\mathbb{Q}$  doit être dénombrable, mais ce n'est pas au programme.

**Coin culture**

$\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable,  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  non plus. Il semble alors évident que  $\mathbb{C}, \mathbb{R}^I, \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$  ne sont pas dénombrables (pour le dernier, considérer le sous ensemble des fonctions constantes...).

**Objectif**

On souhaite étendre la notion de variable aléatoire à ces variables à valeurs dans un ensemble dénombrable (le cas fini est traité en 1ère année). Un des buts est de pouvoir modéliser le genre de situation suivante :

On joue à pile ou face jusqu'à ce que la pièce tombe sur pile. Quel est le nombre moyen de coup ? Le problème pour l'instant est qu'on ne peut pas borner à priori le nombre de coups à jouer et donc la variable aléatoire dont la valeur est ce nombre de coup est a priori à valeurs dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

**I.2 Espaces probabilisés****Notation**

Si les  $A_i$  sont des ensembles pour  $i \in \mathbb{N}$ , on note  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{x \mid \exists i \in \mathbb{N} x \in A_i\}$  la réunion de ces ensembles et  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{x \mid \forall i \in \mathbb{N} x \in A_i\}$  leur intersection.

**I.2.1 Définition**

Soit  $\Omega$  un ensemble que l'on appellera univers. Une **tribu** sur  $\Omega$  est un sous ensemble  $T$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  (les éléments de  $T$  sont des sous ensembles de  $\Omega$ ) qui vérifie les 3 conditions :

1.  $\Omega \in T$
2.  $\forall A \in T A^C = \bar{A} = \Omega \setminus A \in T$ .
3. Si  $(A_n) \in T^{\mathbb{N}}$  alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$ .

Les éléments de  $T$  (qui sont des ensembles, rappelons le) sont des **événements**. Le couple  $(\Omega, T)$  est un **espace probabilisable**.

**En pratique**

$\Omega$  représente l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire et un événement un ensemble de résultat possibles. Pour reprendre notre jeu de pile ou face, on peut prendre  $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et un événement peut être "le jeu s'arrête en un nombre pair de coup" qui est l'ensemble  $\{2n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ .

Bien souvent,  $\Omega$  n'est pas précisé et sa connaissance n'est pas indispensable au bon déroulé de l'exercice. On supposera dans ce cas qu'une bonne tribu est choisie.

**I.2.2 Proposition**

Soit  $(\Omega, T)$  un espace probabilisable.

1.  $\emptyset \in T$ .
2. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$   $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$ . De plus,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c}$

**Preuve.**

Exo! ■

**I.2.3 Définition**

Soit  $\Omega$  un ensemble et  $T$  une tribu sur  $\Omega$ . Une **probabilité** sur  $\Omega$  est une fonction  $\mathbb{P}$  qui associe à chaque événement  $A$  une probabilité  $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$  avec les contraintes suivantes :

1.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'événements incompatibles deux à deux (ie disjoints deux à deux), alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \text{ propriété de } \sigma\text{-additivité}$$

En particulier, toute série de la forme précédente doit converger vers un nombre dans  $[0, 1]$ .

Le triplet  $(\Omega, T, \mathbb{P})$  est appelé un **espace probabilisé**. Dans la suite du cours, nous utiliserons ces notations.

### Cas fini

Si on considère une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements telle que  $A_n = \emptyset$  pour tout  $n \geq 2$ , on retrouve la définition de 1ère année. Avec un nombre fini de  $A_n$  non vide, il s'agit d'une propriété démontrée en 1ère année.

### Mais pourquoi des tribus ?

Dans le cas où  $\Omega$  est fini ou dénombrable, on pourra prendre  $T = \mathcal{P}(\Omega)$  sans problème. Les choses se corsent singulièrement si on prend  $\Omega$  non dénombrable.

Par exemple, on prouve (un "on" qui est bien en dehors du cadre de ce cours), qu'on ne peut pas poser  $\Omega = [0, 1]$ ,  $T = \mathcal{P}(\Omega)$  et la probabilité uniforme naturelle qui vérifie  $\mathbb{P}([a, b]) = b - a$ .

#### I.2.4 Définition

Avec les notations précédentes :

on dit que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements ssi  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$  (disjoints 2 à 2) et  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$ .

#### I.2.5 Exemple

Reprenons l'exemple du jeu de pile ou face. On pose  $A_n$  l'événement : le jeu s'arrête au  $n + 1$  ième lancé, ie on a obtenu  $n$  fois face avant d'obtenir pile. On pose en plus  $A_{-1}$  l'événement : le jeu ne s'arrête pas.

Alors  $(A_n)_{n \geq -1}$  est un système complet d'événements. Essayons de construire une probabilité raisonnable.

On doit avoir  $\sum_{n=-1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$ . Il semble raisonnable de poser  $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^{n+1}}$  (quelle hypothèse faisons nous sur chaque lancé, sur la pièce ?)

Alors  $\mathbb{P}(A_{-1}) = 0$  est la seule possibilité (calculer la somme des probabilités imposées), ce qui semble raisonnable.

#### I.2.6 Définition

Soit  $A$  un événement.

1. Si  $A \neq \emptyset$  et  $\mathbb{P}(A) = 0$  on dit que  $A$  est **négligeable**.
2. Si  $A \neq \Omega$  et  $\mathbb{P}(A) = 1$  on dit que  $A$  est presque sûr.

#### I.2.7 Exemple

Notre jeu de pile ou face se termine presque sûrement.

## I.3 Propriétés des probabilités

### I.3.1 Proposition (Adaptation de la 1ère année)

Soit  $(\Omega, T, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Soient  $A, B$  deux événements et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements.

1.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2.  $\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .
3. Si  $A \subset B$  alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
4.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$  et  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$ .
5.  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^N A_k\right) \leq \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(A_k)$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ .
6. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements alors  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$  et

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

On retrouve le cours de première année en prenant un système complet fini (tous les  $A_n$  sont vides sauf les quelques premiers).

**Preuve.**

1.  $\Omega = \Omega \sqcup \emptyset$
2.  $\Omega = A \sqcup A^c$
3.  $B = A \sqcup (B \setminus A)$
4.  $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$
5. Par récurrence, en partant du cas  $n = 2$  prouvé par le point précédent.
6.  $B$  est la réunion disjointe des  $B \cap A_n$ . ■

**I.3.2 Théorème**

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements.

1. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante au sens de l'inclusion ( $\forall n \in \mathbb{N} A_n \subset A_{n+1}$ ) alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante au sens de l'inclusion ( $\forall n \in \mathbb{N} A_{n+1} \subset A_n$ ) alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Le résultat important est l'existence de ces limites.

**Preuve.**

Le complémentaire d'une réunion étant l'intersection des complémentaires, contentons-nous de prouver le premier point.

Supposons donc  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante au sens de l'inclusion. Alors la suite  $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$  est croissante et majorée par 1 donc converge.

Pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , posons  $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$  et  $B_0 = A_0$ . Alors les  $B_i$  sont disjoints deux à deux (pour imaginer,  $B_n$  est ce qu'il manquait à  $A_{n-1}$  pour devenir l'ensemble  $A_n$  qui est "plus grand").

De plus,  $\bigcup_{k=0}^n B_k = A_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$ . Ainsi  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  et donc  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1}))$ .

La série est télescopique et converge vers  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_0)$ , ce qui conclut la preuve. ■

**I.3.3 Proposition (Sous-additivité)**

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$  converge. Alors  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ .

**Preuve.**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$  qui est une suite croissante d'événements. Alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  et d'après

le théorème précédent,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbb{P}(B_n))$ .

Ainsi  $\left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une limite et on peut passer à la limite l'inégalité 5 de la proposition I.3.1

(Rappel : l'hypothèse du passage à la limite des inégalité est seulement l'existence des limites). ■

**Événements négligeables**

Si tous les  $A_n$  sont négligeables, alors leur réunion l'est aussi.

## II Calcul de probabilités

### II.1 Probabilités conditionnelles

#### II.1.1 Définition-Proposition

Soit  $B$  un événement tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ .

1. Pour un événement  $A$ , la probabilité de  $A$  sachant  $B$  est  $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
2. L'application  $\mathbb{P}_B : \begin{cases} T & \rightarrow [0, 1] \\ A & \mapsto \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) \end{cases}$  est une probabilité. C'est la probabilité conditionnelle sachant  $B$ .

#### II.1.2 Proposition (Formule des probabilités composées)

1. Pour  $A, B$  des événements, si  $\mathbb{P}(B) > 0$  alors  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ . Rappelons en plus que  $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$
2. Si  $A_1, \dots, A_n$  sont des événements tels que  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$  alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}\left(A_n \mid \bigcap_{k=0}^{n-1} A_k\right)$$

#### II.1.3 Exemple

Un savant fou choisi dans la salle de classe des cobaye parmi les élèves. Aucune chance de s'en sortir. Quelle est la probabilité pour qu'il choisisse successivement un garçon, une fille puis un garçon ?

On cherche  $\mathbb{P}(G_1 \cap F_2 \cap G_3) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(F_2|G_1)\mathbb{P}(G_3|G_1 \cap F_2)$ .

#### II.1.4 Proposition (Probabilité totales)

Il s'agit de traduire les propriétés des probabilités vis-à-vis de l'intersection en termes de probabilités conditionnelles.

1. Soit  $A$  un événement ni négligeable ni presque sûr ( $\mathbb{P}(A) \in ]0, 1[$ ). Alors  $A, \bar{A}$  forment un système complet d'événements et pour tout événement  $B$ ,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}).$$

2. Pour  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un système complet d'événements (y compris fini) et  $B$  un événement

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

où l'on convient que  $\mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n) = 0$  si  $\mathbb{P}(A_n) = 0$ .

#### Preuve.

Immédiat. ■

#### II.1.5 Exemple

Un site internet a une audience séparée en deux types : les respectueux qui représentent 90% des inscrits et les trolls. Les premiers ont un probabilité de 0.1 de répondre ou commencer une discussion houleuse sur une journée, les second 0.7.

Un nouvel utilisateur s'inscrit. Avec quelle probabilité participe-t-il à une discussion houleuse dès le premier jour ? Dans les deux premiers jours ?

Notons  $T$  l'événement "le nouvel arrivant est un troll" et  $D$  l'événement "il participe à une discussion houleuse".  
 $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|T) \times \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(D|\bar{T}) \times \mathbb{P}(\bar{T}) = \frac{1}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{4}{25}$ .

Ainsi  $\mathbb{P}(\bar{D}) = \frac{21}{25}$  et la réponse à la deuxième question est  $1 - \left(\frac{21}{25}\right)^2 = 1 - \frac{441}{625} = \frac{184}{625} \approx 0.3$  (préciser l'hypothèse).

**II.1.6 Proposition (Formule de Bayes)**

Soient  $A, B$  deux événements non négligeables ( $\mathbb{P}(A) > 0$  et  $\mathbb{P}(B) > 0$ ). Alors  $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}(A|B)$ .

**II.1.7 Exemple**

Malfaçon ou triche organisée ? Toujours est-il que sur les 100 dés à 6 faces produits aujourd'hui 25 ont une probabilité de 1/2 de tomber sur 6...

On choisit un de ces dés et on le lance. Il tombe sur 6. Avec quelle probabilité est-il pipé ?

Notons  $S$  l'événement "le dé tombe sur 6" et  $T$  l'événement "le dé choisi est pipé". On cherche  $\mathbb{P}(T|S)$ .

On connaît  $\mathbb{P}(S|T) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{4}$ . Il nous manque  $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(S|T) + \mathbb{P}(\bar{T})\mathbb{P}(S|\bar{T}) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$ .

Ainsi  $\mathbb{P}(T|S) = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(S|T)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{1}{2}$ .

**Cas d'application**

Généralement l'énoncé donne  $\mathbb{P}(A|B)$  et  $\mathbb{P}(B)$ . Il faut calculer  $\mathbb{P}(A)$  par la formule des probabilités totales.

**II.2 Événements indépendants****II.2.1 Définition**

Soient  $A, B$  deux événements. On dit que  $A$  et  $B$  sont indépendants ssi  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .

**Lien avec les probas conditionnelles**

Si on suppose  $\mathbb{P}(B) > 0$ , la condition  $A$  et  $B$  sont indépendants devient  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$ . La réalisation de  $A$  ne dépend pas de celle de  $B$ .

**II.2.2 Définition**

Soient  $A_1, \dots, A_n$  des événements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants ssi

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

**Attention**

Trois événements indépendants 2 à 2 ne sont pas forcément mutuellement indépendants.

**Complémentaires**

Si  $(A, B)$  sont indépendants, il en est de même de  $(A^c, B)$ ,  $(A, B^c)$ ,  $(A^c, B^c)$ . On peut généraliser ce résultat à des événements mutuellement indépendants (et mettre des complémentaires ou non où bon nous semble).

**En pratique**

L'énoncé supposera très souvent que certains événements sont indépendants, voire mutuellement indépendants. On pourra alors très facilement calculer des probabilités d'intersection et de réunion ( $1 - \mathbb{P}$ ) en passant au complémentaire, grâce à la remarque précédente.

**III Variables aléatoires****III.1 Lois****III.1.1 Définition**

1. Une variable aléatoire **discrète** est une fonction  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  où  $X(\Omega)$  (l'ensemble des valeurs de  $X$ ) est dénombrable ou fini.
2. Si  $A$  est un ensemble de valeurs de  $X$ , on note  $(X \in A)$  l'événement " $X$  prend l'une des valeurs dans  $A$ ", c'est à dire l'ensemble  $X^{-1}(A)$ .
3. Si  $x$  est l'une des valeurs que peut prendre  $X$  (ie.  $x \in X(\Omega)$ ), on note  $(X = x)$  l'événement  $X^{-1}(\{x\})$ , c'est à dire " $X$  prend la valeur  $x$ ".



## Valeurs

Le première chose à préciser sur une variable aléatoire (en théorie comme en pratique) est l'ensemble de ses valeurs.

### III.1.2 Théorème

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète sur  $\Omega$ . Notons  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  l'ensemble de ses valeurs. Alors  $((X = x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements.

#### Preuve.

1. Si  $i \neq j$ , et  $\omega \in \Omega$   $\omega \in (X = x_i) \cap (X = x_j)$  signifie que  $X(\omega) = x_i$  et  $X(\omega) = x_j$  ce qui est absurde.

2. Si  $\omega \in \Omega$ , notons  $x_n = X(\omega)$ . Alors  $\omega \in (X = x_n)$ .

Ces deux points prouvent que les événements  $(X = x_n)$  sont deux à deux incompatibles et que leur réunion est  $\Omega$ . ■

### III.1.3 Exemple

Revenons à notre pile ou face. Cette fois la pièce est truquée et tombe sur pile avec un probabilité  $p \in ]0, 1[$ . On note  $X$  le numéro du lancé ou le jeu se fini. Calculer pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{P}(X = n)$  ainsi que leur somme.

### III.1.4 Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. La loi de  $X$  est l'application

$$\mathbb{P}_X : \begin{cases} X(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \mathbb{P}(X = x) \end{cases}$$

Avec les notations du théorème précédent, il s'agit de donner,  $\mathbb{P}(X = x_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Somme

D'après le théorème précédent, la loi de  $X$  vérifie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$ .

Réciproquement, on admet que si  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de réels positifs telle que  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ , alors on peut trouver une probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  et une variable aléatoire  $X$  telles que  $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$ .

## III.2 Loi usuelles

### Répétitions

Considérons une répétition illimité de la même expérience aléatoire (par exemple on lance deux dés), et on s'intéresse à un résultat précis que l'on nomme succès (on considère donc une répétition d'expérience "de Bernoulli") qui apparaît avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$ . On suppose les expériences mutuellement indépendantes.

On note  $X$  le rang du premier succès. Donner la loi de  $X$ .

### III.2.1 Définition

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$  (on note  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ) ssi  $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$   $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^k$ .

En particulier, l'ensemble des valeurs de  $X$  est  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

### III.2.2 Proposition

Soit  $X$  une variable aléatoire,  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  pour un  $p \in ]0, 1[$ . Soient  $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .  $\mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k)$ .  
On dit que la loi géométrique est sans mémoire.

#### Preuve.

On a au niveau des événements,  $(X > n + k) \cap (X > n) = (X > n + k)$ . Ainsi  $\mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \frac{\mathbb{P}(X > n + k)}{\mathbb{P}(X > n)}$ .

$$\text{Or } \mathbb{P}(X > n + k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n + k + 1 + i) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(1 - p)^{n+k+1+i} = p(1 - p)^{n+k} \frac{1}{1 - (1 - p)} = (1 - p)^{n+k}.$$

De même  $\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$  et  $\mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k$ . Ce qui conclut. ■

**Explication** Le fait de savoir que les  $n$  premières expériences ont échoués ne présage en rien du nombre d'échec ou de succès à venir.

### III.2.3 Exemple

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Trouver  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha \lambda^n}{n!}$  converge et que sa somme soit 1.

### III.2.4 Définition

Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ . On dit qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  (noté  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ ) ssi  $\forall k \in \mathbb{N} \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

### Cas d'utilisation

On peut utiliser cette loi pour approximer une loi binomiale de paramètre faible (on le verra dans le prochain chapitre de probabilités), ou pour modéliser une expérience où les valeurs de  $X$  ont de fortes chances d'être faible. Nous verrons l'interprétation de  $\lambda$  plus loin dans le chapitre.

## III.3 Variables indépendantes

### III.3.1 Définition

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes sur  $\Omega$ . On note  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{y_m \mid m \in \mathbb{N}\}$  les valeurs possibles de  $X$  et  $Y$  respectivement.

1. La **loi conjointe** du couple  $(X, Y)$  est la loi décrite par la donnée de  $\mathbb{P}(X = x_n, Y = y_m)$  pour toutes les valeurs de  $n$  et  $m$ .
2. Les lois marginales de la loi conjointe de  $(X, Y)$  sont les lois de  $X$  et  $Y$ .
3. Pour  $n_0 \in \mathbb{N}$  fixé tel que  $\mathbb{P}(X = x_{n_0}) \neq 0$ , la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $(X = x_{n_0})$  est la loi donnée par  $\mathbb{P}(Y = y_m \mid X = x_{n_0})$

### Calcul de lois

Notons pour  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $p_{n,m} = \mathbb{P}(X = x_n, Y = y_m)$ . ON suppose donc la loi conjointe connue.

1. Pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé,  $\sum_{m=0}^{+\infty} p_{n,m} = \mathbb{P}(X = x_n)$  car  $((Y = y_m))_{m \in \mathbb{N}}$  forment un système complet d'événements. (On retrouve la première loi marginale par somme).

De même, pour un  $m \in \mathbb{N}$  fixé,  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,m} = \mathbb{P}(Y = y_m)$ .

2. Alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} p_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,m} = 1$ .
3. Pour  $n, m$  fixés,  $\mathbb{P}(Y = y_m \mid X = x_n) = \frac{\mathbb{P}(Y=y_m, X=x_n)}{\mathbb{P}(X=x_n)} = \frac{p_{n,m}}{\sum_{k=0}^{+\infty} p_{n,k}}$ .

### III.3.2 Exemple

On lance une pièce qui tombe sur pile avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$  (et donc face avec une probabilité  $q = 1 - p \in ]0, 1[$ ). On note  $X$  le rang d'apparition du premier pile et  $Y$  le rang du second.

Donner la loi conjointe. Soient  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

- Si  $n \geq m$  alors  $\mathbb{P}(X = n, Y = m) = 0$ .
- Si  $1 \leq n < m$ ,  $\mathbb{P}(X = n, Y = m) = \mathbb{P}(Y = m \mid X = n) \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{m-n-1} \times p(1-p)^{n-1} = p^2(1-p)^{m-2}$ .

Vérifions que la somme vaut 1.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = m) &= \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^{m-1} p(1-p)^{m-n-1} \times p(1-p)^{n-1} \\ &= \sum_{m=2}^{+\infty} (m-1)p^2(1-p)^{m-2} = p^2 \sum_{m=1}^{+\infty} m(1-p)^{m-1} \end{aligned}$$

On re connaît la dérivée de  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  évalué en  $x = 1 - p$ .

Ainsi  $\sum_{m=2}^{+\infty} (m-1)(1-p)^{m-2} = \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p^2}$  et tout est bien qui fini bien.

**III.3.3 Définition**

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes sur  $\Omega$ . on dit qu'elles sont indépendantes ssi  $\forall x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$  ie ssi les événements  $(X = x)$  et  $(Y = y)$  sont deux à deux indépendants pour toutes les valeurs possibles de  $x$  et  $y$ .

**III.3.4 Exemple**

Les variables aléatoires de l'exemple III.3.2 ne sont pas indépendantes. Prendre par exemple  $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 2)$

**Somme de deux lois de Poisson**

Soient  $X, Y$  deux variables  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ , indépendantes. On note  $Z = X + Y$ . Calculer la loi de  $Z$ .

— Premièrement,  $Z$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , comme  $X$  et  $Y$ .

— Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda-\mu} \frac{1}{n!} (\lambda + \mu)^n$ .

Ainsi  $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

**III.3.5 Proposition**

Soient  $X, Y$  deux variables indépendantes et  $A \subset X(\Omega), B \subset Y(\Omega)$ . Alors  $\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$ .

**Extension des notions de premières années** On admet que les résultats suivants sont encore vrais pour des variables aléatoires discrètes.

**III.3.6 Proposition**

Si  $X, Y$  sont des variables aléatoires indépendantes et si on peut calculer  $f(X)$  et  $g(Y)$  pour des fonctions  $f$  et  $g$  alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

**III.3.7 Définition**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $n$  variables aléatoires discrètes sur  $\Omega$ . On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes ssi pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}, \forall x_1 \in X_{i_1}(\Omega), \dots, x_k \in X_{i_k}(\Omega) \mathbb{P}(X_{i_1} = x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_{i_k} = x_k) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(X_{i_j} = x_{i_j})$ .

Autrement dit, on peut calculer toute probabilité d'intersection finie par produit.

**Avec des événements**

La proposition III.3.5 s'étend au cas de variables mutuellement indépendantes.

**A retenir**

Comme pour les événements, on supposera souvent dans l'énoncé que des variables aléatoires sont indépendantes. On pourra alors calculer des probabilités d'intersection (et) par produit.

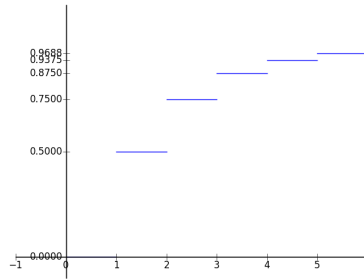
**IV Fonctions et probabilités****IV.1 Fonction de répartition****IV.1.1 Définition**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. On appelle fonction de répartition de  $X$  et on note  $F_X$  la fonction

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{cases}$$

**IV.1.2 Exemple**

Tracer un partie de la courbe représentative de  $F_X$  où  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{2}$ .



**Remarque**

Imaginons que l'on connaisse la fonction de répartition  $F_X$  d'une VA  $X$  mais pas sa loi. Notons  $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  l'ensemble des valeurs de  $X$  où on a ordonné les  $x_n$ , ie la suite  $(x_n)$  est croissante.

Alors  $\mathbb{P}(X = x_0) = F_X(x_0)$  et pour tout  $n \neq 0$ ,  $\mathbb{P}(X = x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1})$

**IV.1.3 Proposition**

Avec les notations de la définition, on a :

1.  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .

**Preuve.**

Il s'agit d'utiliser les propriétés de  $\mathbb{P}$  suivantes : croissance, limite de la probabilité d'une suite décroissante d'événements et limite de la probabilité d'une suite croissante d'événements. ■

**IV.1.4 Exemple**

En pratique, il est parfois plus pratique de calculer des probabilités de la forme  $\mathbb{P}(X \leq n)$ , ce qui revient à calculer la fonction de répartition sans le dire.

Soient par exemple  $X, Y$  deux VA indépendantes de loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$  et  $Z = \min(X, Y)$ . Calculer  $1 - F_Z$

Pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}((X > n) \cap (Y > n)) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(Y > n) = ((1 - p)^2)^n$ .

On en déduit facilement que  $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(2p - p^2)$ .

**IV.2 Fonction génératrice**

**Une série entière**

Soit  $X$  une VA à valeurs dans  $\mathbb{N}$  (son ensemble de valeurs est un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ ).

Considérons la série entière  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$ . Comme cette série converge absolument pour  $t = \pm 1$ , son rayon de convergence vaut au moins 1.

**IV.2.1 Définition**

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . La fonction génératrice (ou série génératrice) de  $X$  est la fonction

$$G_X : t \mapsto E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

$G_X$  est définie au moins sur le segment  $[-1, 1]$ ,  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, 1[$  et  $G_X(1) = 1$ .

**Remarque**

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul, la loi de  $X$  est entièrement déterminée par la fonction  $G_X$ .

**Valeurs manquantes**

On convient de poser  $\mathbb{P}(X = n) = 0$  pour tous les  $n$  qui ne sont pas des valeurs de  $X$ . En particulier, pour une variable aléatoire sur un univers fini  $G_X$  est polynomiale!

**IV.2.2 Exemple**

Calculons les fonctions génératrices pour les lois usuelles.

1. Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  (Bernoulli,  $p \in ]0, 1[$ ).

Alors  $G_X : t \mapsto (1 - p)t^0 + pt^1 = 1 - p + pt$ .

2. Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  (binomiale,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $p \in ]0, 1[$ ).

Alors  $G_X : t \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} t^k = (1 - p + pt)^n$ .

3. Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  (où  $p \in ]0, 1[$ ).

La série considérée est  $\sum_{n \geq 1} p(1 - p)^{n-1} t^n = pt \sum_{n \geq 0} ((1 - p)t)^n$ .

Cette série géométrique converge ssi  $|(1 - p)t| < 1$  et donc

$$\forall t \in ] - \frac{1}{1 - p}, \frac{1}{1 - p} [ \quad G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t}$$

Remarquons que le rayon de convergence de la série est  $\frac{1}{1 - p} > 1$ .

4. Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  ( $\lambda > 0$ ).

Pour  $t \in ] - 1, 1[$ ,  $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$ .

**IV.2.3 Exercice**

Déterminer la fonction génératrice d'une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**IV.2.4 Théorème**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et **indépendantes**, notons  $R_X$  et  $R_Y$  les rayons de convergence de  $G_X$  et  $G_Y$  respectivement. Posons également  $r = \min(R_X, R_Y)$

Alors  $G_{X+Y}$  est de rayon  $R \geq r$  et

$$\forall t \in ] - r, r [ \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$$

**Preuve.**

Pour  $t \in ]0, r[$ , on pose  $f_t : x \mapsto t^x$ . Alors  $f(X)$  et  $f(Y)$  sont indépendantes (cf chapitre de probabilités) et donc  $E(t^X)E(t^Y) = E(t^X t^Y) = E(t^{X+Y})$ . Ainsi  $t \leq R$  et on a bien  $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ .

Deuxième méthode. La série produit (de Cauchy)  $G_X G_Y$  est de rayon  $R \geq \min(R_X, R_Y)$  et pour  $t \in ] - r, r [$

$$G_X(t)G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

où  $c_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = n - k)) = \mathbb{P}(X + Y = n)$ . ■

**IV.2.5 Exemple**

On peut utiliser ce théorème pour calculer la loi d'une somme de variables indépendantes.

1. Soient  $\lambda, \mu > 0$  et  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ .

Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)} = G_{X+Y}(t)$ .

Ainsi  $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$  (car la fonction génératrice détermine la loi).

2. Lançons deux dés équilibrés à 6 faces et notons  $X, Y$  les résultats obtenus pour le premier et le second dé respectivement.

Donner la loi de  $X + Y$  (la somme des deux dés).

Ici les lois prennent un nombre fini de valeurs et donc les fonctions génératrices sont polynomiales.

Pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G_X(t) = G_Y(t) = \frac{1}{6} t \sum_{k=0}^5 t^k$ . De plus  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

Ainsi  $G_{X+Y}(t) = \left( \frac{1}{6} t \sum_{k=0}^5 t^k \right)^2 = \frac{t^2}{36} (1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + 6t^5 + 5t^6 + 4t^7 + 3t^8 + 2t^9 + t^{10})$ . On obtient

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

### IV.3 Espérance, variance

**Explication** La notion d'espérance s'étend de manière naturelle aux variables aléatoires discrète. Par contre l'existence de l'espérance n'est pas garantie a priori, vu qu'il s'agit de la convergence d'une série numérique.

#### IV.3.1 Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . On dit que  $X$  est d'espérance finie ssi  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$  converge **absolument**.

Dans ce cas, on appelle **espérance de  $X$**  et on note  $E(X)$  le réel  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = X_n)$ .

**Explication** Comme pour le théorème sur le produit de Cauchy il nous faut ici supposer la convergence absolue. La raison est hors de notre programme : la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre dans lequel on calcule celle-ci. En particulier ici, on peut numéroter les éléments de  $X(\Omega)$  comme bon nous semble sans changer l'espérance (encore heureux!). En pratique, nos variables aléatoires sont très souvent à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et l'ordre de sommation est naturel (mais pas imposé).

#### IV.3.2 Exemple

On peut définir une loi à valeurs dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  par  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mathbb{P}(X = n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$  car la série converge et est de limite 1.

Dans ce cas  $X$  n'est pas d'espérance finie.

#### IV.3.3 Définition-Proposition

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. Si  $X^2$  est d'espérance finie alors  $X$  aussi. Dans ce cas :

1. on appelle **variance** de  $X$  le nombre réel positif  $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$ .
2. on appelle **écart-type** de  $X$  le nombre réel positif  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

Si  $\sigma(X) = 1$ , on dit que  $X$  est réduite.

**Preuve.**

On suppose  $X^2$  d'espérance finie ie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 \mathbb{P}(X = x_n)$  converge. Montrons que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \mathbb{P}(X = x_n)$  converge.

Remarquons que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|x_n| \mathbb{P}(X = x_n) \leq \begin{cases} x_n^2 \mathbb{P}(X = x_n) & \text{si } |x_n| \geq 1 \\ \mathbb{P}(X = x_n) & \text{sinon} \end{cases}$ .

Dans tous les cas  $|x_n| \mathbb{P}(X = x_n) \leq (x_n^2 + 1) \mathbb{P}(X = x_n)$  qui est la somme de deux TG de séries convergentes et positives. Par comparaison de séries à termes positifs,  $X$  est d'espérance finie. ■

#### IV.3.4 Théorème

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et  $G_X$  sa fonction génératrice.

1.  $X$  possède une espérance finie ssi  $G_X$  est dérivable en 1 et alors  $E(X) = G'_X(1)$ .
2.  $X$  possède une variance finie ssi  $G_X$  est deux fois dérivable en 1 et alors

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

#### Retrouver les formules

Tout d'abord, on a  $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n)$  et  $E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}(X = n)$  (théorème de transfert).

De plus, on supposant la dérivabilité terme à terme,  $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n) t^{n-1}$  donc on a bien  $G'_X(1) = E(X)$ .

De plus,  $G''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(X = n) t^{n-2}$  donc  $G''_X(1) = E(X^2) - E(X)$ .

#### IV.3.5 Exemple

Trouvons l'espérance et la variance des lois géométriques et de Poisson.

1. Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  (où  $p \in ]0, 1[$ ).

$G_X$  des DSE sur  $] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$  donc est deux fois dérivable en 1.

De plus,  $G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$  donc  $G'_X(t) = \frac{p(1-(1-p)t) + pt \times (1-p)}{(1-(1-p)t)^2} = \frac{p}{(1-(1-p)t)^2}$  donc  $E(X) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$ .

De même  $G''(t) = p \times (-2) \times (-(1-p)) \times (1 - (1-p)t)^{-3}$  donc  $G''(1) = \frac{2p(1-p)}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2} = E(X^2) - E(X)$ .

Ainsi  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$ .

2. Soit  $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  ( $\lambda > 0$ ).

Cette fois  $G_X$  est DSE sur  $\mathbb{R}$  donc dérivable deux fois en 1.

De plus  $G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$  et  $G''_X(1) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$ .

Ainsi  $E(X) = G'_X(1) = \lambda$  et  $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ .

#### IV.3.6 Proposition (Propriétés de l'espérance)

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes sur  $\Omega$ .

1. Linéarité. Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .  $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$ .
2. Positivité : si  $X \geq 0$  alors  $E(X) \geq 0$ .
3. Croissance. Si  $\forall \omega \in \Omega$   $X(\omega) \leq Y(\omega)$  (que l'on note  $X \leq Y$ ) alors  $E(X) \leq E(Y)$ .
4. Si  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

#### Preuve.

1. Admis. on peut appliquer le théorème de transfert à la VA  $(X, Y)$  et la fonction  $(x, y) \mapsto x + y$  et utiliser le cours sur les séries absolument convergentes.
2. Evident : une série à termes positifs convergent a une somme positive.
3. Conséquence directe (et classique!) des deux propriétés précédentes.
4. Admis. ■

#### IV.3.7 Exemple

1. Ceci est tout à fait en accord avec notre calcul de la loi d'une somme de deux lois de Poisson indépendantes.
2. Si  $X$  est d'espérance finie  $m = E(X)$ , alors  $X - E(X)$  est une variable **centrée** ie d'espérance nulle.

#### IV.3.8 Théorème (Théorème de transfert)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète et  $f$  une fonction définie sur  $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  à valeurs réelles.  $f(X)$  est d'espérance finie ssi  $\sum_{n \geq 0} f(x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$  est absolument convergente.

Alors  $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$ . Ainsi l'espérance de  $f(X)$  est déterminée par la loi de  $X$ .

#### Preuve.

Admis. ■

#### IV.3.9 Exemple

Montrer que  $2^X$  est d'espérance finie et calculer son espérance quand  $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ .

#### IV.3.10 Proposition

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle et  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $V(aX + b) = a^2 V(X)$ .

#### Preuve.

On utilise  $V(aX + b) = E((aX + b)^2) - (E(aX + b))^2 = E(a^2 X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X) + b)^2 = a^2 E(X^2) - a^2 (E(X))^2 = a^2 V(X)$ . ■

## IV.4 Covariance

### IV.4.1 Définition-Proposition

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes. Si  $X$  et  $Y$  admettent un moment d'ordre 2 alors la variable  $(X - E(X))(Y - E(Y))$  est d'espérance finie.

Dans ce cas on appelle covariance de  $X$  et  $Y$  le réel

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

**Preuve.**

Il s'agit de montrer que  $XY$  est d'espérance finie (les autres VA le sont facilement quand on développe).

Or  $|XY| \leq X^2 + Y^2$  qui est bien d'espérance finie. ■

**Remarque**

On a  $\text{cov}(X, X) = V(X)$ .

**IV.4.2 Proposition**

Dans les conditions de la définition précédente :

1.  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ .
2. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .
3. la covariance est bilinéaire et symétrique.

**Preuve.**

Simple utilisation de la linéarité de l'espérance, en plus de la propriété  $E(a) = a$  quand  $a$  est une constante.

Le deuxième point est une conséquence directe d'un théorème du chapitre sur les probabilités.

La symétrie est évidente, la bilinéarité conséquence simple de la linéarité de l'espérance. ■

**IV.4.3 Proposition**

Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires admettant une variance finie. Alors  $X + Y$  est de variance finie et

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$$

**Preuve.**

En effet,  $V(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$ . ■

**IV.4.4 Exemple**

Ainsi pour des variables indépendantes,  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$  et plus généralement la variance d'une somme de variables mutuellement indépendantes est la somme des variances.

Rappelons une application importante, posons  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  des variables aléatoires mutuellement indépendante de même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

Alors  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

Or  $V(X_0) = E(X_0^2) - E(X_0)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$  et donc  $V(S) = np(1 - p)$ .

Finissons le rappel par  $E(S) = nE(X_0) = np$  par linéarité de l'espérance.

**IV.4.5 Théorème (Cauchy-Schwartz)**

On a  $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$

**Preuve.**

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Alors  $V(X + tY) = \dots = t^2 V(Y) + 2t \text{cov}(X, Y) + V(X)$  qui est de degré 2 (si  $V(Y) \neq 0$ ) et positif.

Le discriminant est donc négatif. ■

**IV.4.6 Définition**

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires de variance finie et non nulle. Le coefficient de corrélation de  $X$  et  $Y$  est

$$\text{cor}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1, 1]$$

**Interprétation**

L'étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz précédente, permet de montrer que  $\text{cor}(X, Y) = \pm 1$  ssi  $Y = aX + b$  pour  $a, b$  des réels. De plus, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $\text{cor}(X, Y) = 0$ . On peut "donc" interpréter ce coefficient comme une mesure du lien (autrement appelé corrélation) qui existe entre  $X$  et  $Y$ .



## V Etude asymptotique

### V.1 Interprétation de la loi de Poisson

#### V.1.1 Proposition

Soit  $\lambda > 0$ .

On considère une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires telles que  $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$  où  $p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}$  fixé, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

**Preuve.**

On cherche à estimer la limite de  $\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$ .

Or  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k!} n^k$ . (par produit d'un nombre fixé d'équivalents)

De plus,  $p_n^k \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{n^k}$  (encore une fois,  $k$  est fixé).

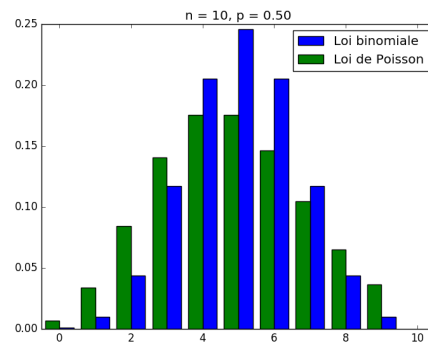
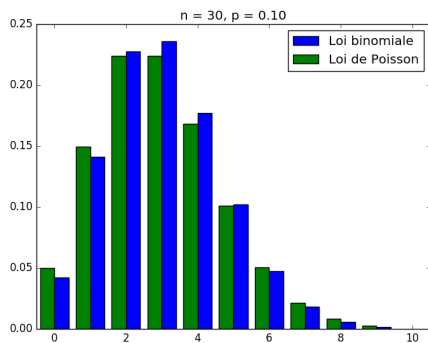
De plus,  $(1 - p_n)^{n-k} \underset{+\infty}{\sim} (1 - p_n)^n$  car  $(1 - p_n)^{-k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ .

Comme  $(1 - p_n)^n = e^{n \ln(1-p_n)} = e^{n(-p_n + o_+(p_n))} = e^{-\lambda + o_+(1)}$  (avec 2  $o(1)$  obtenus en remplaçant  $p_n$  par son équivalent dans le  $o$ ). Ainsi  $(1 - p_n)^n \underset{+\infty}{\rightarrow} e^{-\lambda} \neq 0$  (et donc on peut transformer cette limite en équivalent).

Il n'y a plus qu'à effectuer le produit de nos équivalents.. ■

#### En pratique

On peut utiliser une loi de Poisson pour approximer une loi binomiale de paramètre  $(n, p)$  dans le cas où  $\lambda = np$  n'est "pas trop grand".



### V.2 Loi des grands nombres

#### V.2.1 Théorème (Inégalité de Markov)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle à valeurs positives, d'espérance finie.

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

**Explication** L'idée "grossière" derrière ce théorème est que si l'espérance (la valeur moyenne) de  $X$  vaut  $m$ , alors  $X$  ne prend pas des valeurs trop grande par rapport à  $m$ , ou alors avec une probabilité très faible.

**V.2.2 Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**

Soit  $X$  une variable aléatoire de variance finie.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

**Explication** On quantifie cette fois l'écart entre  $X$  et sa "moyenne". La variance apparaît naturellement.

**V.2.3 Exemple**

On pose  $S_n$  la moyenne arithmétique de  $n$  variables de loi de Bernoulli indépendantes de paramètre  $p$ .  $S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Exemple pratique : on dépouille une urne contenant  $n$  bulletins dans une élection à deux candidats. ( $X_i = 1$ ) est l'événement : le  $i$ -ème bulletin est pour le candidat  $A$ . Ici l'indépendance des variables n'est sûrement pas respecté dans la pratique. Tant pis, poursuivons.

Le but est d'estimer  $p$ , la proportion de votant ayant choisi le candidat  $A$ . Cette probabilité (théorique) est inconnue au moment de l'expérience.

Alors  $E(S) = p$  et  $V(S) = \frac{p(1-p)}{n}$ .

$S$  représente la proportion votes après  $n$  dépouillements indépendants. Alors  $\mathbb{P}(|S - p| > \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ .

On veut  $\mathbb{P}(|S - p| > \varepsilon) \leq 5\%$ . Comment choisir  $\varepsilon$ ? Il faut  $\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{5}{100}$  soit encore  $\varepsilon^2 \leq 20 \frac{p(1-p)}{n}$ .

Or  $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$  (étape obligatoire, on ne connaît pas encore  $p$ ). On a donc  $\varepsilon^2 \leq \frac{5}{n}$ .

Ainsi, si on veut une approximation de  $p$  à 1% près, on prend  $\frac{1}{100} \leq \sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{n}}$  soit encore  $n \geq 5 \cdot 10^4$ .

Attention, on à juste le résultat : la probabilité pour que la fréquence théorique s'écarte de plus de 1% de la fréquence observée est  $\leq \frac{5}{100}$

**V.2.4 Théorème (Loi faible des grands nombres)**

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2.

On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et on note  $m = E(X_1)$  l'espérance commune aux  $X_k$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

. Pour un  $\varepsilon > 0$  fixé, la limite est nulle.

**Explication** Ce théorème est la formalisation mathématique d'une idée naturelle.

Je répète  $n$  fois la même expérience aléatoire de Bernoulli (paramètre  $p$ ) sans connaître a priori le paramètre  $p$  (on cherche à estimer une fréquence de manière empirique, par exemple pour réaliser un sondage...)

Alors la fréquence moyenne de succès converge vers le paramètre théorique  $p$ .

**Résumé sur les lois usuelles**

Nom	Notation	Valeurs	Loi	Fonctions génératrice	Espérance
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	$G_X(t) = 1 - p + pt, t \in \mathbb{R}$	$p$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$G_X(t) = (1 - p + pt)^n, t \in \mathbb{R}$	$np$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$	$G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}, t \in ]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$	$\frac{1}{p}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}, t \in \mathbb{R}$	$\lambda$

# Chapitre 13

## Equations différentielles linéaires

### I Equations scalaires

Rappel : il s'agit de trouver toutes les FONCTIONS qui vérifient une certaine relation sur un intervalle donné

#### I.1 Equations d'ordre 1

##### I.1.1 Définition

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$\forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad (E)$$

avec  $a, b$  des fonctions définies sur un intervalle  $I$ . L'équation homogène associée à  $E$  est

$$\forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (E_H)$$

On appelle solution de  $E$  toute **fonction** dérivable  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $\forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ . Les courbes représentatives des fonctions solutions sont appelées *courbes intégrales* de l'équation.

Le problème consistant trouver une solution de  $E$  vérifiant en plus une condition du type  $y(t_0) = y_0$  ( $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ ) est appelé un problème de Cauchy. On parle de condition initiale.

##### Notation

On omet parfois de préciser l'intervalle dans l'écriture de l'équation, voire la variable. Dans ce cas l'intervalle est précisé une fois pour toute.

Par exemple, résolvons sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $y' - 2y = 0$ .

##### I.1.2 Théorème (Résolution de l'équation homogène)

Soit  $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  et  $A$  une **primitive** de  $a$  sur  $I$ . Pour une fonction  $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$  les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $E_H \quad \forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$
2.  $\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall t \in I \quad y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ .

Ainsi, à chaque scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  correspond exactement une fonction solution  $y$  et on remarque que toutes les fonctions solutions sont proportionnelles.

Si de plus on donne  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$  pour transformer cette équation en problème de Cauchy en lui adjoignant la condition  $y(t_0) = y_0$ , alors ce problème de Cauchy possède une unique solution.

##### I.1.3 Théorème (Cauchy)

Soient  $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . Etant donné  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ , il existe une unique solution (sur  $I$ )  $y$  de l'équation différentielle  $E$  qui vérifie  $y(t_0) = y_0$ .

**I.1.4 Proposition**

L'ensemble des solutions de  $E$  sur  $I$  est un espace affine de dimension 1, c'est à dire que toute solution  $y$  est de la forme  $y_p + y_H$  où  $y_p$  est l'une des solutions de  $E$  (appelée solution particulière) et  $y_H$  est une solution quelconque de  $E_H$ .

**Sur les courbes intégrales**

Soient  $y_1$  et  $y_2$  des solutions de  $E$ . Pour  $t_0 \in I$  quelconque, si  $y_1(t_0) = y_2(t_0)$  alors  $y_1$  et  $y_2$  sont solutions d'un même problème de Cauchy et donc sont égales.

Ainsi deux solutions d'une même équation différentielle linéaire sont soit égales, soit leur courbes représentatives ne se coupent pas.

**Méthode**

Pour résoudre une équation du type  $y' + ay = b$  :

1. On commence par résoudre l'équation homogène associée :  $y' + ay = 0$ , ce qui se fait par un premier calcul de primitive.
2. On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre. Soit il y en a une évident, soit via la méthode de variation de la constante. Ceci nécessite un deuxième calcul de primitive.
3. On explicite clairement l'ensemble des solutions demandé (problème de Cauchy, solutions ayant telle ou telle propriété...)

**I.1.5 Exemple**

Résolvons l'équation  $(E) : ty' + y = t^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a ici un problème, car le coefficient de  $y$  s'annule.

— On se place sur  $I = \mathbb{R}_+^*$  ou  $\mathbb{R}_-^*$ . L'équation devient  $y' + \frac{1}{t}y = t$  et l'équation homogène a pour solution toutes les fonctions de la forme  $y : t \mapsto \frac{\lambda}{t}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est quelconque.

— On applique la méthode de variation de la constante. On cherche une solution sous la forme  $y : t \mapsto \frac{\lambda(t)}{t} = \lambda(t)f(t)$  où  $\lambda \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  et  $f : t \mapsto \frac{1}{t}$  est une solution de l'équation homogène.

Alors, pour tout  $t \in I$ ,  $\lambda'(t)f(t) + \lambda(t)f'(t) + \frac{1}{t}f(t) = t \iff \lambda'(t)f(t) = t \iff \lambda'(t) = t^2$ .

On prend  $\lambda : t \mapsto \frac{t^3}{3}$  et  $y : t \mapsto \frac{t^2}{3}$  est une solution particulière de  $E$  sur  $I$

— Raccordement. Si  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ , alors elle vérifie  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ . Ainsi  $y : t \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda_1}{t} + \frac{t^2}{3} & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda_2}{t} + \frac{t^2}{3} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

où  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

La seule possibilité pour pouvoir prolonger  $y$  par continuité en 0 et alors de prendre  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Ainsi, la seule solution possible de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  est  $y : t \mapsto \frac{t^2}{3}$ .

— Réciproquement (attention, ne pas oublier la synthèse!),  $t \mapsto \frac{t^2}{3}$  est bien solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  (par un calcul facile).

**I.2 Equation d'ordre 2****I.2.1 Définition**

On considère l'équation  $(E_H)$  sur  $\mathbb{R} : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$  où  $a, b, c \in \mathbb{K}$  avec  $a \neq 0$ .

L'équation caractéristique associée est  $ar^2 + br + c = 0$  d'inconnue  $r \in \mathbb{C}$ .

**I.2.2 Théorème (Résolution de l'équation homogène, cas complexe)**

On considère  $a, b, c \in \mathbb{C}$  avec  $a \neq 0$  et on cherche les solutions de  $(E_H)$  à **valeurs complexes**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines  $r_1$  et  $r_2$  distinctes dans  $\mathbb{C}$ , alors  $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est solution de  $(E_H)$  ssi il existe  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  tels que

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{cases}$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double  $r$  alors  $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est solution de  $(E_H)$  ssi il existe  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  tels que

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{rt} \end{cases}$$

Si de plus on se donne  $t_0 \in I$  et  $y_0, y'_0 \in \mathbb{C}$ , alors il existe une unique solution  $y$  de l'équation différentielle homogène qui vérifie  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = y'_0$ .

### I.2.3 Théorème (Résolution de l'équation homogène, cas réels)

On considère  $a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$  et on cherche les solutions de  $(E_H)$  à **valeurs réelles**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines  $r_1$  et  $r_2$  distinctes dans  $\mathbb{R}$ , alors les solutions à valeurs réelles de  $(E_H)$  sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double  $r$  alors les solutions à valeurs réelles de  $(E_H)$  sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{rt} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Si l'équation possède deux solutions non réelles, qui sont donc complexes conjuguées et notée  $\alpha \pm i\beta$ , alors les solutions à valeurs réelles de  $(E_H)$  sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

De la même manière, un problème de Cauchy réel possède une unique solution.

### I.2.4 Théorème

Soient  $a, b, c \in \mathbb{K}$  tels que  $a \neq 0$  et soit  $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ .

1. Soient  $t_0 \in I$  et  $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$ . Le problème de Cauchy (sur  $I$ )

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) & = d \\ y(t_0) & = y_0 \\ y'(t_0) & = y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

2. L'équation différentielle linéaire

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

admet au moins une solution  $y_p$  sur  $I$ , et l'ensemble de ses solutions est  $y_p + \mathcal{S}_0$  où  $\mathcal{S}_0$  est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

### I.2.5 Proposition (Principe de superposition)

Soient  $a, b, c \in \mathbb{K}$ ,  $a \neq 0$  et  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . On suppose que  $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$  vérifient  $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$  et  $ay_2'' + by_2' + cy_2 = f_2$ . Alors pour tous  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$  est solution de l'équation différentielle  $ay'' + by' + cy = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ .

**Méthode**

Le second membre est de la forme  $Ae^{\alpha t}$  avec  $A, \alpha \in \mathbb{C}$  des constantes. On cherche  $y_p$  sous la forme  $P(t)e^{\alpha t}$  où  $P$  est :

1.  $K$  une constante si  $\alpha$  n'est pas solution de l'équation caractéristique.
2.  $t \mapsto Kt$  si  $\alpha$  est une racine de l'équation caractéristique (ie  $e^{\alpha t}$  est l'une des solution de l'équation homogène)
3.  $t \mapsto Kt^2$  si  $\alpha$  est une racine double de l'équation caractéristique.

Dans tous les cas, il faut déterminer la constante  $K$

**I.2.6 Exemple**

Résoudre  $y'' + y = \cos(x)$ .

**I.3 Ordre 2, coefficients non constants**

**I.3.1 Théorème (Cauchy-Lipschitz)**

Soient  $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . Soient également  $t_0 \in I, y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$ . Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad \text{possède une unique solution } \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}) \text{ définie sur } I.$$

**Preuve.**

Admis! ■

**I.3.2 Théorème**

Soient  $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . L'ensemble des solutions sur  $I$  de l'équation  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$  est un espace affine de dimension 2. Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Plus précisément, les solutions de  $(E_H) y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$  sont de la forme  $t \mapsto \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$  (pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  quelconques) où  $y_1, y_2$  sont solutions de  $(E_H)$  et **non proportionnelles** et toute solution de (E) est de la forme  $y_p + y_H$  où  $y_p$  est une solution particulière de (E) et  $y_H$  une solution quelconque de  $(E_H)$ .

**Preuve.**

Le théorème précédent nous assure l'existence de  $y_p$  qui est une solution particulière de (E) (il suffit de choisir une condition particulière).

Notons  $\mathcal{S}_0$  l'ensemble des solutions de  $(E_H)$  et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de (E).

Posons  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^I \\ y \mapsto y'' + ay' + by \end{cases}$  qui est facilement linéaire. Alors  $\mathcal{S}_0 = \ker(\varphi)$ .

Alors pour  $t_0 \in I, \begin{cases} \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{K}^2 \\ y \mapsto \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \end{cases}$  est linéaire ( $\mathcal{S}_0$  est un  $\mathbb{K}$ -ev, voir le cours de sup) et bijective

d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. ce qui conclut sur la dimension de  $\mathcal{S}_0$ .

Soit maintenant  $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$ . Alors  $y \in \mathcal{S} \iff \varphi(y) = \varphi(y_p) \iff \varphi(y - y_p) = 0 \iff y - y_p \in \mathcal{S}_0$  ce qui prouve bien que  $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$  (plan affine). ■

**Principe de superposition**

Il reste bien évidemment valable, même quand les coefficients ne sont pas constants.

**Méthode de résolution**

Il n'y a pas de méthode générale! On ne connaît que la forme des solutions, ainsi que la structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. En général, l'exercice propose une méthode pour trouver au moins une solution de l'équation homogène.

### Recherche d'une solution DSE

Toujours en deux phases :

1. Analyse : on suppose qu'il existe une solution DSE de rayon  $R > 0$  et on trouve une relation sur les coefficients, que l'on résout.
2. Synthèse : on montre que la ou les fonctions trouvées sont solution. Soit en reconnaissant le DSE (fonction usuelle), soit en prouvant que le rayon de convergence trouvé est  $> 0$ . Il reste à vérifier (automatique normalement), que la fonction ainsi définie est bien solution, sur un intervalle que l'on précisera bien.

Résolvons sur des intervalles le plus grand possible  $t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0$  (E).

On cherche une solution  $y$  sous la forme  $y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ , ie  $y$  est la somme d'une série entière sur un intervalle  $] -r, r[$  pour  $r > 0$ .

Alors, pour  $t \in ] -r, r[$ ,  $y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$  et  $y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

$y$  est solution de (E) ssi

$$\begin{aligned} t^2(1-t)y''(t) - t(1+t)y'(t) + y(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} (-n(n-1) - n) a_n t^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1) - n + 1) a_n t^n - a_1 t - a_1 t^2 + a_0 + a_1 t &= 0 \\ \Leftrightarrow - \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 a_n t^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 a_n t^n - a_1 t^2 + a_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow - \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)^2 a_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 a_n t^n - a_1 t^2 + a_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) t^n + a_2 t^2 - a_1 t^2 + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Par unicité des coefficient d'un DSE de rayon non nul,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = a_2$  et  $\forall n \geq 3$   $(n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0$  donc  $\forall n \geq 2$   $a_n = a_{n-1}$ .

Finalement,  $a_0 = 0$  et  $\forall n \geq 1$   $a_n = a_1$  donc  $y(t) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} t^n = a_1 t \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1} = \frac{a_1 t}{1-t}$ .

Synthèse : le rayon de convergence de la série trouvé étant égal à 1, l'unicité est valable et donc  $y : t \mapsto \frac{a_1 t}{1-t}$  est solution de (E) sur  $] -1, 1[$  pour toute valeur de  $a_1$ . C'est mieux que ce à quoi on pouvait s'attendre, vu que le coefficient de  $y''$  s'annule en 1 et 0.

Il nous manque une solution de cette équation homogène, non proportionnelle à  $t \mapsto \frac{t}{1-t}$ .

### Trouver une deuxième solution

On reprend le cas général :  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$  sur l'intervalle  $I$ .

Si on connaît une solution  $y_0$  de (E) sur  $I$  qui ne s'annule pas, alors on fait un changement de fonction inconnue,  $\lambda = \frac{y}{y_0}$  ie on cherche une autre solution  $y$  sous la forme  $y = \lambda y_0$  où  $\lambda \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$  est notre inconnue.

En remplaçant dans l'équation, le terme en  $\lambda$  disparaît toujours.

#### 1.3.3 Exemple

ON reprend  $t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0$  (E) avec  $y_0 : t \mapsto \frac{t}{1-t}$ . On cherche  $y$  sous la forme  $y = \lambda y_0$  sur l'intervalle  $]0, 1[$  (pour l'instant).

Alors  $y$  est solution de (E) ssi  $t^2(1-t)(\lambda'' y_0 + 2\lambda' y_0' + \lambda y_0'') - t(1+t)(\lambda' y_0 + \lambda y_0') + \lambda y_0 = 0$  ssi  $t^2(1-t)\lambda'' y_0 + \lambda'(2t^2(1-t)y_0' - t(1+t)y_0) = 0$

Or  $t^2(1-t)y_0 = t^3$  et  $2t^2(1-t)y_0'(t) - t(1+t)y_0(t) = 2t^2 \frac{1-t+t}{(1-t)} - \frac{t^2(1+t)}{1-t} = t^2 \frac{1-t}{1-t} = t^2$ .

Ainsi  $\lambda$  vérifie  $\lambda'' + \frac{1}{t}\lambda' = 0$  et donc  $\lambda'(t) = C_1 \frac{1}{t}$  et  $\lambda(t) = C_1 \ln|t| + C_2$  où  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Finalement, les solutions de (E) sur  $]0, 1[$  sont de la forme  $y : t \mapsto C_1 \frac{t \ln(t)}{1-t} + C_2 \frac{t}{1-t} = \frac{t}{1-t} (C_1 \ln(t) + C_2)$ .

Le calcul de vérification montre que  $y : t \mapsto \frac{t}{1-t} (C_1 \ln|t| + C_2)$  est solution sur les intervalles  $] -\infty, 0[, ]0, 1[, ]1, +\infty[$ .

## II Systèmes différentiels linéaires

### II.1 Cauchy-Lipschitz

#### II.1.1 Définition

Soit  $Y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}^n)$  une fonction à valeurs vectorielles. On pose  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ . Soient également  $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$  et une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Le système d'équations différentielles  $Y' = AY + B$  est appelé un système différentiel linéaire à  $n$  équations et  $n$  inconnues, à coefficients constants.
2. Le système homogène associé est  $Y' = AY$ . Il est défini sur  $\mathbb{R}$  a priori.
3. Résoudre un tel système, c'est trouver toutes les fonctions  $y_1, \dots, y_n$  le vérifiant.
4. Soit  $t_0 \in I$  et  $Y_0 \in \mathbb{K}^n$ . On appelle problème de Cauchy (en  $(t_0, Y_0)$ ) le système  $\begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$

#### II.1.2 Exemple

Dans le cas  $n = 2$ , un tel système peut être  $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + e^t \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + \sin(t) \end{cases}$ .

#### II.1.3 Théorème

Avec les notations de la définition, un problème de Cauchy possède une unique solution.  
Les hypothèses sont  $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ ,  $I$  est un intervalle infini et  $t_0 \in I$ .

**Preuve.**

Admis ■

#### II.1.4 Théorème

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et (H) le système différentiel  $Y' = AY$ . L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  de ses solutions est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}^n)$  de dimension  $n$ .

Si  $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ , l'ensemble des solutions de  $Y' = AY + B$  est un sous-espace affine de direction  $\mathcal{S}_H$ , c'est à dire que les solutions sont de la même forme que pour les équations scalaires précédentes.

**Preuve.**

Comme pour l'ordre 2 scalaire, on construit une bijection linéaire entre  $\mathcal{S}_H$  et  $\mathbb{K}^n$  grâce au théorème II.1.3 ■

## II.2 Cas $A$ diagonalisable

### Résolution

$$\text{Résolvons } \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  peut s'écrire  $A = PDP^{-1}$  où  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On a maintenant  $Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y \iff P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$ . Si on pose  $X = P^{-1}Y$  (ie  $Y = PX$ ), alors le système différentiel devient  $Y' = DY$  (la multiplication par la matrice  $P^{-1}$  consiste en des sommes et des produits par des constantes donc  $P^{-1}Y' = (P^{-1}Y)'$  par linéarité de la dérivation).

En notant  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  on obtient  $\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$  que l'on sait résoudre. Il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $x_1 : t \mapsto ae^{3t}$  et  $x_2 : t \mapsto be^t$ .

$$\text{Or } Y = PX = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } Y : t \mapsto a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} ae^{3t} - be^t \\ ae^{3t} + be^t \end{pmatrix}.$$



**Remarque importante**

Nous n'avons pas eu besoin du calcul de  $P^{-1}$ . La méthode précédente est à retenir, surtout le passage de  $Y$  à  $X$ .

**II.2.1 Proposition**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisable dans  $\mathbb{K}$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres et  $V_1, \dots, V_n$  des vecteurs propres associés, qui forment une base de  $\mathbb{K}^n$ .

Alors l'ensemble des solutions de  $Y' = AY$  est  $\text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1, \dots, t \mapsto e^{\lambda_n t} V_n)$ .

**Preuve.**

C'est une généralisation facile de l'exemple précédent. ■

**Matrice réelle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$** 

Dans ce cas, on obtient dans le théorème précédent, des expressions de la forme  $e^{\lambda t} V$  et  $e^{\bar{\lambda} t} \bar{V}$ . On admet que l'on peut les remplacer par  $\text{Re}(e^{\lambda t} V)$  et  $\text{Im}(e^{\lambda t} V)$ .

**II.2.2 Exemple**

Traiter le cas  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

**Limite et parties réelles des valeurs propres**

Notez que l'exponentielle réelle qui apparaît est de la forme  $e^{\text{Re}(\lambda)}$ . A quelle condition peut-on dire que toutes les solutions  $Y$  vérifient  $Y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  ?

**Cas  $A$  trigonalisable**

On peut faire un résolution de proche en proche. Chaque ligne devient une équation scalaire d'ordre 1 à résoudre.

**Second membre**

Si le système est de la forme  $Y' = AY + B$  avec  $B$  continue, on reprend les notations de l'exemple. On trouve  $X' = DX + P^{-1}B$  et il faut calculer  $P^{-1}$  pour trouver  $X$  avant de calculer  $Y$ .

**II.3 Lien avec les équations scalaires à coefficient constant****Transformation du problème**

On souhaite résoudre  $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$ . On pose  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$  et l'équation devient  $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} Y$ .

**Equation caractéristique**

D'après le cours sur les matrices compagnons, le polynôme caractéristique, dans le cas général, est directement lisible sur l'équation, comme pour l'ordre 2.

Plus précisément, si on veut résoudre  $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = 0$ , le polynôme caractéristique de la matrice obtenu est  $X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ . On retrouve bien le résultat connu quand  $n = 2$ .



# Chapitre 14

## Géométrie dans le plan et l'espace

### I Isométries

#### I.1 Groupe orthogonal en dimension 2

On se place dans  $\mathbb{R}^2$ . On note  $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2)$  la base canonique.

##### I.1.1 Définition

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , on pose  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  et  $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ .

##### Interprétation géométrique

1. Donner l'image d'un vecteur unitaire par  $R_\theta$ . C'est la matrice de la rotation d'angle  $\theta$
2. On note  $\mathcal{D} : -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = 0$ . Calculer la matrice de la symétrie orthogonale d'axe  $\mathcal{D}$ .

##### I.1.2 Proposition (Caractérisation de $O_2(\mathbb{R})$ )

Soit  $M \in O_2(\mathbb{R})$ .

1.  $M \in SO_2(\mathbb{R})$  ssi il existe  $\theta$  tel que  $M = R_\theta$ . Ainsi les matrices de  $SO_2(\mathbb{R})$  commutent entre elles.
2.  $\det M = -1$  ssi  $M$  est de la forme  $S_\theta$

##### Preuve.

— On commence par remarquer que toutes les matrices  $R_\theta$  sont clairement dans  $SO_2(\mathbb{R})$ .

Réciproquement, soit  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ . Alors  $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$

On peut donc écrire, d'après les deux premières équations  $a = \cos \varphi, b = \sin \varphi$  et  $c = \cos \psi, d = \sin \psi$ . Maintenant la condition sur le déterminant est

$$\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi = 1 \text{ ie. } \cos(\varphi + \psi) = 1$$

On en déduit que  $\varphi + \psi = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Donc  $\sin \psi = \sin(-\varphi) = -\sin \varphi$  et  $\cos \psi = \cos \varphi$ . CQFD.

— On peut faire la même démonstration avec  $\det M = -1$  et trouver le résultat annoncé. ■

#### Traduction sur les isométries

Soit  $f \in O(\mathbb{R}^2)$  une isométrie du plan. Alors  $f$  est une rotation ssi  $\det(f) = 1$  et  $f$  est une réflexion ssi  $\det(f) = -1$ .

Dans le cas d'une rotation, il suffit de déterminer l'image d'un vecteur de base pour en déduire l'angle. pour une réflexion, on cherche la droite de point fixe pour la caractériser géométriquement.

##### I.1.3 Exemple

Calculer  $R_\theta S_\varphi$ . On pourra d'abord remarquer que c'est une matrice d'isométrie négative.

#### Composition de deux réflexions

La composée de deux réflexion est une rotation du plan. Il reste à déterminer l'angle.

### Valeurs propres

1. Les matrices de rotations  $R_\theta \neq I_2$  ne sont pas diagonalisables dans  $\mathbb{R}$ . Leurs valeurs propres sont  $e^{\pm i\theta}$ .
2. Les réflexions sont diagonalisables, de valeurs propres 1 et -1 (multiplicité 1).

## I.2 Groupe orthogonal en dimension 3

On se place maintenant dans  $E = \mathbb{R}^3$  espace euclidien de dimension 3, et  $\mathcal{B}_c$  est une base directe.

### I.2.1 Définition

Si  $f$  est la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $D = \text{Vect}(u)$  orienté par le vecteur unitaire  $u$ , alors dans toute base orthonormée de la forme  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  (le premier vecteur doit être  $u$ ) on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

L'interprétation géométrique est la suivante :  $\text{Vect}(u)$  est la droite des points fixes, et dans  $P = \text{Vect}(v, w) = \text{Vect}(u)^\perp$ ,  $f$  est la rotation d'angle  $\theta$ .

On dit que l'axe de  $f$  est orienté par  $u$ , car l'angle de rotation dans l'espace dépend de la direction selon laquelle on observe le plan  $P$ . Le sens de  $u$  donne le "dessus" de  $P$  et donc le côté par lequel on observe  $P$  pour que l'angle soit bien  $\theta$ . On change le sens de  $u$  (qui devient donc  $-u$ ), alors l'angle de la même rotation devient  $-\theta$ .

### I.2.2 Proposition

Soit  $f \in O(E)$  une isométrie d'un espace euclidien. Alors si  $f$  possède une valeur propre  $\lambda$  réelle, on a  $\lambda = \pm 1$ .

#### Preuve.

Soit  $x \neq 0_E$  un vecteur propre associé à  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $f$ .

Alors  $\|f(x)\| = \|x\|$  car  $f$  est une isométrie. On a donc  $\|\lambda x\| = \|x\|$  ou encore  $|\lambda|\|x\| = \|x\|$ . Ainsi  $|\lambda| = 1$  car  $x$  est non nul donc de norme non nulle.

Plus généralement, soit  $M$  la matrice dans une base orthonormée de  $f$  et  $\lambda \in Sp(M)$  réelle ou non. Soit également un vecteur  $X \in \mathbb{K}^n$  propre de  $M$  associé à  $\lambda$ .

Alors  $\bar{X}$  est un vecteur propre associé à  $\bar{\lambda}$  (car  $M$  est à coefficients réels) et on a  ${}^t(A\bar{X})AX = \bar{\lambda}{}^t\bar{X}\lambda X = |\lambda|^2 {}^t\bar{X}X$ .

Si on note  $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$  alors  ${}^t\bar{X}X = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 > 0$ .

De plus, comme  $A$  est orthogonale,  ${}^t(A\bar{X})AX = \bar{\lambda}{}^tAAX\lambda = \bar{\lambda}\lambda X = X$ . Ainsi  $\|\lambda^2\| = 1$  et  $\lambda$  est de module 1. ■

### Etude des valeurs propres

Soit  $f \in O(E)$ . Comme 3 est impair,  $\chi_f$  possède une racine réelle qui vaut forcément  $\pm 1$ . Notons  $u$  un vecteur propre associé à  $\lambda = \pm 1$ .

Alors  $P = \text{Vect}(u)^\perp$  est stable par  $f$  et  $f|_P$  est une isométrie d'un plan vectoriel. Ainsi  $f|_P$  est une rotation ou une réflexion. Si  $f|_P$  est une réflexion, alors  $f$  est une symétrie orthogonale. Dans le cas où  $f|_P$  est une rotation il y a plusieurs possibilités :

- Cas  $\lambda = 1$ .  $f$  est une rotation de l'espace.
- Cas  $\lambda = -1$ .  $f$  est la composée (commutative) d'une rotation et d'une réflexion. L'axe de rotation est  $\text{Vect}(u)$  et le plan de réflexion est  $P$ .

Dans une BOND  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  (en prenant  $u$  de norme 1, c'est toujours possible), alors  $(v, w)$  est une base orthonormée de  $P$  et on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et le produit commute bien.

**I.2.3 Théorème**

Soit  $f \in O(E)$  avec  $E$  de dimension 3.

1. Si  $\det f = 1$  alors  $f$  est une rotation de l'espace (ou un retournement qui est une rotation d'angle  $\pi$ ).
2. Si  $\det f = -1$ , alors  $f$  est soit une réflexion soit la composée d'une réflexion et d'une rotation (l'axe de rotation étant orthogonal au plan de réflexion).

**Etude d'une matrice orthogonale**

Soit  $M \in O_3(\mathbb{R})$ . On suppose  $M \neq \pm I_3$ . On note  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Si  $M$  est symétrique, alors  $f$  est une symétrie orthogonale. Si  $\text{tr}(M) = 1$  il s'agit d'une réflexion (symétrie par rapport à un plan), si  $\text{tr}(M) = -1$  il s'agit d'une symétrie axiale (retournement).
2. Sinon il y a deux cas.
  - (a) Si  $\det(M) = 1$ , alors  $f$  est une rotation.
  - (b) Si  $\det(M) = -1$  alors  $-M$  est une matrice de rotation d'axe  $\text{Vect}(u)$  orienté par  $u$  et d'angle  $\theta$ . Alors  $f$  est la composée de la réflexion par rapport à  $\text{Vect}(u)^\perp$  et de la rotation d'axe  $\text{Vect}(u)$  et d'angle  $\theta + \pi$ .

**I.2.4 Exemple**

Soit  $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .  $M$  est symétrique donc il s'agit d'une matrice de symétrie orthogonale. Comme  $\text{tr}(M) = -1$ , il s'agit d'une symétrie axiale.

On détermine l'axe comme ensemble des points fixes, ie comme noyau de  $M - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ . Clairement

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  vérifie  $(M - I_3)X = 0$  donc  $M$  est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale d'axe  $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Déterminer une rotation**

Soit  $M$  une matrice de  $SO_3(\mathbb{R})$ .

1. Etape 1 : déterminer l'axe. Il s'agit de l'ensemble des points fixes, ou encore de l'espace propre associé à la valeur propre 1. On fixe  $u$  de norme 1 directeur de l'axe.
2. Etape 2 : déterminer l'angle. On le note  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ .

On a déjà,  $\text{tr}(M) = 1 + 2 \cos(\theta)$  donc on connaît  $\cos(\theta)$  facilement. Il reste à trouver le signe de  $\theta$ , ie le signe de  $\sin(\theta)$ .

Fixons  $v, w$  tels que  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  soit une BOND. Alors  $\det_{\mathcal{B}}(u, v, Mv) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta \end{vmatrix} = \sin \theta$ .

Si maintenant  $X \in \mathbb{R}^3$  n'est pas sur l'axe de rotation, on écrit  $X = au + X_P$  où  $X_P$  est non nul et orthogonal à  $u$ . Alors, dans la base orthonormée directe  $\mathcal{B}' = (u, \frac{X_P}{\|X_P\|}, u \wedge \frac{X_P}{\|X_P\|})$ ,  $\det_{\mathcal{B}'}(u, X, MX) = \det(u, X_P, MX_P) = \|X_P\|^2 \sin(\theta)$

**Méthode**

Pour déterminer l'axe  $D$  et l'angle  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  d'une rotation dans l'espace de matrice  $M$  dans la base canonique :

1. Trouver  $D$  comme noyau de  $M - I_3$ . On note  $D = \text{Vect}(u)$  où  $u$  est unitaire.
2. Soit  $X$  un vecteur  $X \notin D$ .  $\theta$  vérifie  $\begin{cases} \text{tr}(M) = 1 + 2 \cos \theta \\ \text{sg}(\sin(\theta)) = \text{sg}(\det(u, X, MX)) \end{cases}$  où le déterminant est calculé dans une BOND, de préférence dans la base canonique. En règle générale, on prend pour  $X$  un vecteur de la base canonique.

### I.2.5 Exemple

Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $M$  est une matrice de rotation dont on précisera un axe dirigé et l'angle correspondant.

## II Coniques

### II.1 Forme réduite

#### II.1.1 Définition

Une conique de  $\mathbb{R}^2$  est l'ensemble des points  $M : (x, y)$  vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  et  $d, e, f \in \mathbb{R}$ .

#### II.1.2 Exemple

Les cercles sont des cas particuliers de coniques.

#### II.1.3 Définition

Soient  $a, b, p > 0$ . On appelle équation réduite de conique les équations suivantes :

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (ellipse)
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (hyperbole)
- $y^2 = 2px$  (parabole)

## II.2 Tracés

### Etude

Nous allons paramétrer chacune de ces coniques pour les tracer.

1. Une ellipse admet un paramétrage par  $\exists \theta \in [0, 2\pi]$   $\begin{cases} x = a \cos(\theta) \\ y = b \sin(\theta) \end{cases}$ . On obtient un tracé de la forme : Ici  $b = 1, a > b$ . on observe deux axes de symétrie (et le centre  $O$  qui est centre de symétrie).

2. Une hyperbole est la réunion de deux arcs paramétrés :  $\exists t \in \mathbb{R}$   $\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch}(t) \\ y = b \operatorname{sh}(t) \end{cases}$ .

Encore une fois on observe deux axes de symétries.

3. Un parabole se paramètre en  $\exists t \in \mathbb{R}$   $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$ . Cette fois nous n'avons plus que l'axe ( $Ox$ ) qui est axe de symétrie.

### Tracés

## II.3 Réduction d'une conique

### Ecriture matricielle

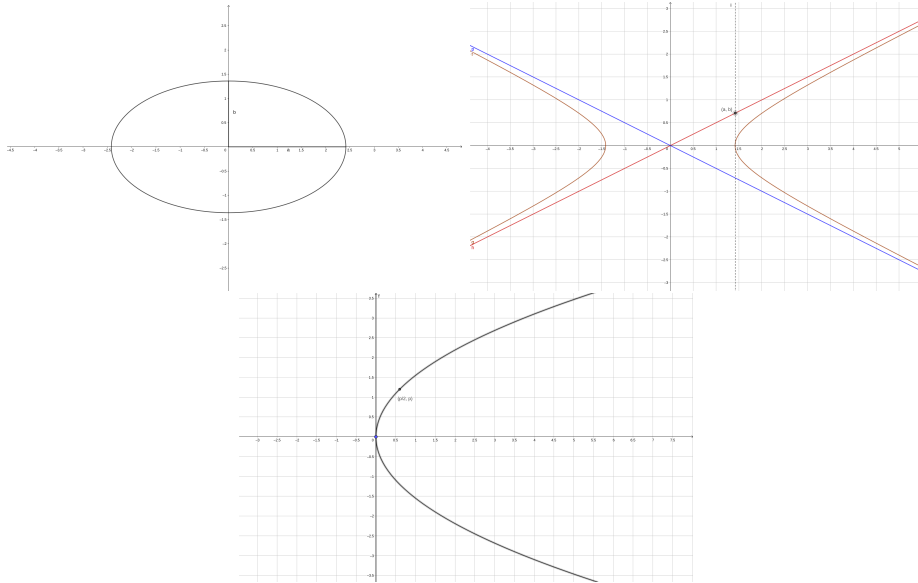
Fixons les coefficients d'une équation de conique.

On pose  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ . Alors  ${}^tXAX = ax^2 + bxy + cy^2$ . Ainsi en posant en plus  $L = (d \ e)$ , on obtient :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \iff {}^tXAX + LX + f = 0$$

Le but est maintenant de diagonaliser  $A$ , ce qui fait disparaître le terme "rectangle" en  $xy$ .

D'après le théorème spectral, on peut toujours trouver une base orthonormée directe dans laquelle l'équation n'a plus de terme en  $xy$ .



**Après rotation**

Comme  $A$  est symétrique réelle, on peut la diagonaliser dans une base orthonormée directe. Notons  $\lambda, \mu$  ses valeurs propres. On suppose  $\lambda \neq \mu$  (sinon,  $A$  était déjà diagonale, les homothétie ne changent pas de matrice par changement de base). Notons  $P$  la matrice de passage (qui diagonalise  $A$ ).

Posons  $X' = P^{-1}X = {}^tPX$  ie  $X = PX'$ , les coordonnées de  $X$  dans la nouvelle base.

$${}^tXAX + LX + f = 0 \iff {}^t(PX')APX' + LPX' + f = 0 \iff {}^tX'DX' + (LP)X' + f = 0 \iff \lambda x'^2 + \mu y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0 \text{ où } LP = \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix}.$$

1. Si  $\lambda = 0$  et  $\mu \neq 0$ , on obtient (mise sous forme canonique) soit une parabole soit une réunion de droites.
2. Si  $\lambda \neq 0$  et  $\mu \neq 0$ , on passe sous forme canonique (pour  $x$  et  $y$ , attention à bien factoriser par  $\lambda$  et  $\mu$ ) pour obtenir soit une équation d'ellipse soit une équation d'hyperbole (au moins pour le membre de gauche), après changement de repère par translation (la mise sous forme canonique donne les coordonnées du centre, comme pour les cercles).

Suivant la valeur de la constante, on peut obtenir un seul point, l'ensemble vide ou deux droites sécantes.

**II.3.1 Exemple**

Tracer les coniques  $3x^2 + 4xy + 3y^2 = \pm 1$ ,  $x^2 - 4xy - 2y^2 + 2x - 4y = \alpha$ .

On obtient d'abord l'ensemble vide, puis une ellipse (rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$ )

Pour la seconde, la matrice est  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ .  $\det(A_2) < 0$ , on obtient une conique de type hyperbole. Les valeurs propres sont les racines de  $X^2 + X - 6$  qui sont 2 et  $-3$ .

$E_2(A_2) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $E_{-3} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . On pose  $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{u}, \vec{v})$ . L'équation dans le nouveau repère devient  $2x'^2 - 3y'^2 + 2(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}) - 4\frac{-x'+2y'}{\sqrt{5}} = \alpha$  c'est à dire  $2x'^2 - 3y'^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{6}{\sqrt{5}}y' = \alpha \iff 2(x' + \frac{2}{\sqrt{5}})^2 - \frac{8}{5} - 3(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{3}{5} = \alpha \iff 2(x' + \frac{3}{2\sqrt{5}})^2 - \frac{9}{10} - 3(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = \alpha + 1$

On obtient une hyperbole ou la réunion de deux droites suivant la valeur de  $\alpha$ .

**Méthode**

Pour réduire une équation de conique :

1. Diagonaliser  $A$ , puis écrire l'équation dans le nouveau repère.
2. Passer sous forme canonique en  $x$  et  $y$  (ou seulement l'un des deux).
3. Exhiber l'éventuel centre, faire le tracé dans le nouveau repère.





# Chapitre 15

## Courbes et surfaces

Dans ce chapitre on rapporte l'espace usuel euclidien à  $\mathbb{R}^3$  par le choix d'un repère orthonormé de référence  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et on identifie les points avec leur colonne de coordonnées.

### I Paramétrages

#### I.1 Courbes paramétrées

##### I.1.1 Définition

Une courbe paramétrée de l'espace est une fonction  $f : t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  définie sur un intervalle  $I$  non trivial.

Son **support**  $\Gamma$  est l'ensemble  $\{M(t) | t \in I\} = f(I)$ . C'est l'ensemble que l'on cherche à tracer ou étudier.

Si  $\Gamma$  est inclus dans un plan, on dira que  $f$  (ou abusivement  $\Gamma$ ) est une courbe plane, sinon on dit que  $f$  est une courbe gauche.

##### I.1.2 Exemple

- $\begin{cases} x(t) = \alpha + at \\ y(t) = \beta + bt \\ z(t) = \gamma + ct \end{cases}$  (définie sur  $\mathbb{R}$ ) où  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$  et  $\alpha, \beta, \gamma$  sont fixés est une courbe plane.
- $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases}$  (définie sur  $\mathbb{R}$ ) est une courbe gauche.

##### I.1.3 Définition-Proposition

Soit  $f : t \mapsto M(t)$  une courbe paramétrée définie sur  $I$ , dérivable. On note  $\Gamma$  son support.

- Pour  $t_0 \in I$ , le point  $M(t_0)$  est dit **régulier** ssi  $f'(t_0) \neq \vec{0}$ .
- Si  $M(t_0)$  est régulier, la tangente à  $\Gamma$  en  $M(t_0)$  est dirigée par  $f'(t_0)$ .

##### Remarque

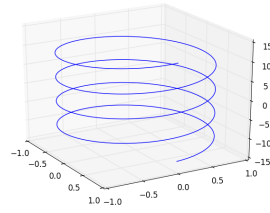
Si  $\Gamma$  est plane, alors toutes ses tangentes son contenues dans le plan qui contient  $\Gamma$ .

##### I.1.4 Exemple

On reprend le deuxième exemple.  $f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases}$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$  on note  $f(t) = M(t)$  Pour  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t_0) =$

$$\begin{pmatrix} -\sin(t_0) \\ \cos(t_0) \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0. \text{ La tangente est donc } \begin{pmatrix} \cos(t_0) \\ \sin(t_0) \\ t_0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \begin{pmatrix} -\sin(t_0) \\ \cos(t_0) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons la projection de  $\Gamma$  sur  $(xOy)$  et  $(xOz)$ . Le projeté de  $M(t)$  sur  $(xOy)$  est  $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$  et donc la projection de  $\Gamma$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.



Le projeté de  $M(t)$  sur  $(xOz)$  est  $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ . La projection de  $\Gamma$  est la courbe représentative de  $\cos$  tracée le long de l'axe  $(Oz)$ .

Remarque :  $\Gamma$  est contenue dans la surface d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  qui est un cylindre.

## I.2 Surfaces paramétrées

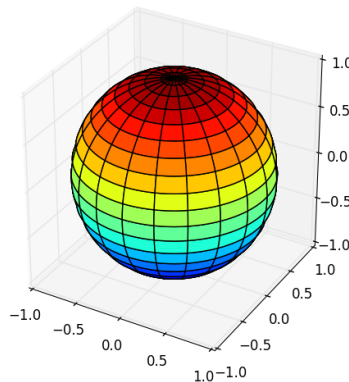
### I.2.1 Définition

On appelle nappe paramétrée ou surface paramétrée une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . Une telle fonction  $f$  sera notée  $f : (u, v) \mapsto M(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ .

Le support d'une surface paramétrée est l'ensemble  $S = \{M(u, v) \mid (u, v) \in U\} = f(U)$ .

### I.2.2 Exemple

Pour  $u, v \in \mathbb{R}$  on pose  $M(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$ . Voir python pour le tracé



### I.2.3 Définition

Soit  $f : (u, v) \mapsto M(u, v)$  une surface paramétrée de support  $S$ . Une courbe **tracée sur**  $S$  est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans  $S$ .

Définir une telle courbe revient à donner deux fonctions  $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  ( $I$  un intervalle) telles que  $\forall t \in I (u(t), v(t)) \in U$ . On obtient alors une courbe  $\gamma : t \mapsto M(u(t), v(t))$ . Son support  $\Gamma$  est inclus dans  $S$ .

### I.2.4 Théorème

Soit  $\gamma : t \mapsto M(u(t), v(t))$  définie sur  $I$  une courbe tracée sur  $S$  (notation de la définition). Soit  $t_0 \in I$ . Si  $\gamma(t_0) = M(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$  est un point régulier alors la tangente en ce point a un vecteur directeur appartenant à  $\text{Vect}(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0))$

**Preuve.**

$\gamma$  est dérivable par composition et on a pour  $t \in I$ ,  $\gamma'(t) = u'(t) \frac{\partial M}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial M}{\partial v}(u(t), v(t))$ .

Si on applique en  $t_0$ , on obtient le résultat souhaité (et même les coefficients de la combinaison linéaire correspondante qui sont respectivement  $u'(t_0)$  et  $v'(t_0)$ ). ■

**I.2.5 Définition**

Soit  $f : (u, v) \mapsto M(u, v)$  une surface paramétrée définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$ . On note  $S$  son support. Soit  $(u_0, v_0) \in U$  et  $M_0 = M(u_0, v_0)$ .

1. On dit que  $M_0$  est un point **régulier** de  $S$  (ou de  $f$ ) ssi  $(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0))$  est libre c'est à dire ssi  $\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$ .

Sinon on dit que  $M_0$  est critique ou singulier.

2. Si  $M_0$  est régulier, on appelle plan tangent à  $S$  en  $M_0$  le plan

$$M_0 + \text{Vect}\left(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)\right).$$

**Remarque**

Le plan tangent en  $M_0$  est en fait la réunion de toutes les tangentes aux courbes tracées sur  $S$  et qui passent par  $M_0$ .

**I.2.6 Exemple**

Pour  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  on pose  $\begin{cases} x(u, v) = u + v \\ y(u, v) = u - v \\ z(u, v) = uv \end{cases}$ . Trouvons les points réguliers ainsi que le plan tangent en  $(u, v) = (0, 0)$ .

$$\frac{\partial M}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}, \frac{\partial M}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ u \end{pmatrix}. \text{ Alors } \frac{\partial M}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u + v \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

En  $(0, 0)$  le plan tangent est normal à  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  donc a une équation de la forme  $z + c = 0$  où  $c \in \mathbb{R}$  est à trouver.

Or  $M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc le plan cherché est d'équation  $z = 0$ .

Plus généralement, au point  $M(u_0, v_0)$ , le plan tangent est normal à  $\begin{pmatrix} u_0 + v_0 \\ u_0 + v_0 \\ -2 \end{pmatrix}$  et possède donc une équation de la forme  $(u_0 + v_0)x + (u_0 + v_0)y - 2z + c = 0$  où  $c \in \mathbb{R}$  est à trouver. Or ce plan passe par  $M(u_0, v_0)$  donc  $(u_0 + v_0)^2 + u_0^2 - v_0^2 - 2u_0v_0 + c = 0$ . Après simplification on trouve  $c = -2u_0^2$ .

**I.2.7 Définition**

En un point régulier  $M_0$ , la droite passant par  $M_0$  et normale au plan tangente est appelée normale à la surface en  $M_0$ .

**II Equation cartésienne****II.1 Equation explicite****Surface représentative**

Rappelons que pour  $f : \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ , sa surface représentative est la surface d'équation  $z = f(x, y)$  qui est l'ensemble  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \mid (x, y) \in U \right\}$ .

Une telle surface peut être paramétrée par  $M(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$ .

**Plans tangents**

Tous les points sont réguliers car on obtient  $\frac{\partial M}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(u, v) \end{pmatrix}$ ,  $\frac{\partial M}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \end{pmatrix}$  et le plan tangent est normal à  $\begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On retrouve le résultat du cours sur les fonctions de deux variables. Au point  $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  de la surface  $S : z = f(x, y)$ , le plan tangent est d'équation

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

**II.1.1 Exemple**

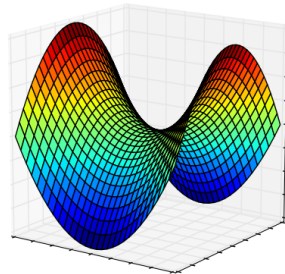
Calculons l'équation du plan tangent et une représentation paramétrique de la normale en tout point régulier de  $S : z = x^2 - y^2$ .

Comme vu au dessus, tous les points sont réguliers et en  $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_0^2 - y_0^2 \end{pmatrix} \in S$ , le plan tangent est

$$P_0 : z = z_0 + (x - x_0)2x_0 + (y - y_0) \times (-2y_0) = 2x_0x - 2y_0y - x_0^2 + y_0^2$$

La normale est alors  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_0^2 - y_0^2 \end{pmatrix} + \text{Vect} \begin{pmatrix} 2x_0 \\ -2y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Surface  $z = x^2 - y^2$



**Intersection avec un plan**

Donner l'interprétation géométrique des intersections de la surface  $S$  précédente avec les plans d'équations  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ ,  $z = \gamma$  pour  $\alpha, \beta, \gamma$  fixés.

On trouve respectivement : une parabole, une parabole, une hyperbole ou la réunion de deux droites (qui est le cas  $\gamma = 0$ ).

**II.2 Equation implicite**

**II.2.1 Définition**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ . On appelle surface (implicite) d'équation  $f(x, y, z) = 0$  l'ensemble  $\Sigma =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0 \right\} \text{ (l'ensemble des solutions de l'équation).}$$

Un point  $M \in \Sigma$  est dit **régulier** ssi  $\overrightarrow{\text{grad}} f(M) \neq \vec{0}$  et singulier sinon.

**II.2.2 Exemple**

On peut par exemple considérer les surfaces d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ou  $x^2 + y^2 = 4$  (décrire cette dernière).

**Egalité avec une surface paramétrée**

Reprenons  $M(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$  et notons  $S$  le support de la surface.

Si  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(u, v) \in S$  alors  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  et donc  $S \subset \Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Dans le cas général, montrer l'égalité est délicat. Le cas favorable est quand les surfaces ne sont pas égales et il suffit de trouver un point de  $\Sigma$  qui ne soit pas dans  $S$  (on raisonne souvent sur les signes d'une ou plusieurs coordonnées).

Dans notre exemple, il y a égalité et nous allons le montrer.

Soit  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma$ . Ainsi  $(x^2 + y^2) + z^2 = 1$ . Donc il existe un  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$  (unique d'ailleurs) tel que  $z = \sin(\alpha)$  et  $x^2 + y^2 = \cos^2 \alpha$ .

Si  $\cos(\alpha) = 0$ , alors  $x = y = 0$  (et d'ailleurs  $z = \pm 1$ ). Sinon,  $(\frac{x}{\cos \alpha})^2 + (\frac{y}{\cos \alpha})^2 = 1$  et donc (toujours d'après le cours de sup), il existe  $\beta \in ]-\pi, \pi]$  tel que  $\frac{x}{\cos \alpha} = \cos \beta$  et  $\frac{y}{\cos \alpha} = \sin \beta$ .

En posant  $u = \beta$  et  $v = \alpha$ , on a bien  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(u, v)$  et donc  $\Sigma \subset S$ .

**II.2.3 Théorème (Plan tangent)**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ . Soit  $\Sigma$  la surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$  et  $M_0 \in \Sigma$  un point régulier.

Alors le plan tangent à  $\Sigma$  en  $M_0$  est le plan passant par  $M_0$  et normal à  $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)$  ie le plan d'équation

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

**Preuve.**

Admis ■

**II.2.4 Exercice**

Montrer que les plan tangents à une sphère sont normaux au rayon.

**II.2.5 Exemple**

Décrire géométriquement la courbe plane  $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x - y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \end{cases}$ .

$\mathcal{C}$  est l'intersection d'un plan et d'un sphère : il s'agit d'un cercle ou d'un point ou de l'ensemble vide.

Décrire la projection orthogonale de  $\mathcal{C}$  sur  $(xOy)$ . Il s'agit de faire disparaître  $z$  de l'équation de la sphère, pour décrire  $\mathcal{C}$  comme l'intersection d'un plan et d'un cylindre perpendiculaire à  $(xOy)$ .

On obtient une conique d'équation  $x^2 + y^2 + 2(x - y)^2 = 1 \iff 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 1$  La matrice associée est  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  dont les valeurs propres sont 1 et 5. De plus  $E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $E_5(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi par rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$  on obtient l'équation réduite  $x'^2 + 5y'^2 = 1$  qui est une équation d'ellipse que l'on sait tracer.

```
u = np.array([1, 1]) / np.sqrt(2)
v = np.array([-1, 1]) / np.sqrt(2)
T = np.linspace(-np.pi, np.pi, 150)
points = [np.cos(t) * u + np.sin(t) * v / np.sqrt(5) for t in T]
X = np.array([p[0] for p in points])
Y = np.array([p[1] for p in points])
plt.plot(X, Y)
```

**Adaptation aux courbes définies implicitement**

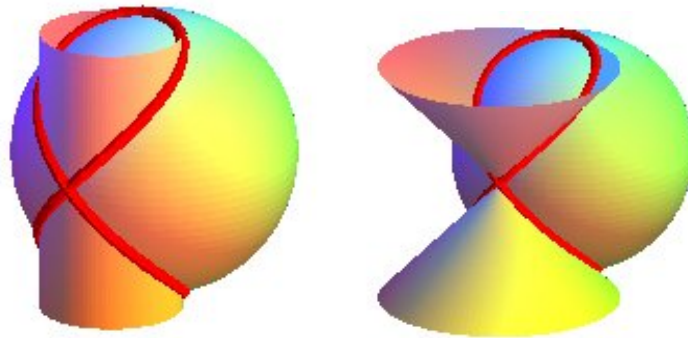
On a des résultats tout à fait similaires pour les courbes de  $\mathbb{R}^2$  définies par des équations de la forme  $f(x, y) = 0$ .

En particulier, la droite tangente en  $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  est d'équation

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

pour un point régulier  $M_0$  de la courbe.

### II.3 Intersection de surfaces



#### II.3.1 Définition

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$ .

On appelle courbe d'équation cartésienne  $\Gamma : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$  l'intersection des des surfaces ainsi définies (cette intersection peut être une surface, un ou des points, vide...).

Un point  $M \in \Gamma$  est dit régulier si et seulement si  $\overrightarrow{\text{grad}} f(M) \wedge \overrightarrow{\text{grad}} g(M) \neq \vec{0}$

#### Remarque

Un point  $M_0$  est régulier ssi il l'est pour les deux surfaces  $\Sigma_1 : f(x, y, z) = 0$  et  $\Sigma_2 : g(x, y, z) = 0$  et que les plans tangents en  $M_0$  ne sont pas confondus.

#### II.3.2 Théorème

Avec les notations de la définition précédente, si  $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  est un point régulier de  $\Gamma$  alors la tangente à  $\Gamma$  en  $M_0$  est la droite  $M_0 + \text{Vect}(\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) \wedge \overrightarrow{\text{grad}} g(M_0))$

#### Preuve.

Une idée : la tangente à  $\Gamma$  est l'intersection des plans tangents à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  en  $M_0$ . De plus, le gradient est normal au plan tangent. ■

## III Surfaces particulières

### III.1 Surfaces réglées

#### III.1.1 Définition

Une surface  $S$  est dite **réglée** ssi elle peut être écrite comme la réunion d'une famille de droites.

Plus précisément,  $S$  est réglée ssi il existe une surface paramétrée dont le support est  $S$  de la forme  $M(k, t) = A(t) + ku(t)$  où  $A, u$  sont de classe  $C^k(I, \mathbb{R}^3)$  et  $u$  ne s'annule pas.  $M$  est alors définie sur  $I \times \mathbb{R}$ .

Pour un  $t$  fixé, la droite  $\mathcal{D}_t = A(t) + \text{Vect}(u(t))$  est une **génératrice** de  $S$  et on a  $S = \bigcup_{t \in I} \mathcal{D}_t$

#### III.1.2 Exemple

Le cylindre d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  est réglé. Ses génératrices sont parallèles à  $(Oz)$ . Une paramétrisation possible est

$$M(k, t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ k \end{pmatrix}$$



**III.1.3 Exemple**

Considérons la jolie surface  $\Sigma : x^2 + y^2 - z^2 = 1$  (hyperboloïde de révolution à une nappe).

Soit  $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Supposons pour l'instant  $x \neq \pm 1$ .

$M \in \Sigma$  ssi  $(y - z)(y + z) = (1 - x)(1 + x)$ .

Or  $(1 - x)(1 + x) \neq 0$  donc  $M \in \Sigma$  ssi il existe un  $p \neq 0$  tel que  $(y - z) = p(1 - x)$  et  $(y + z) = \frac{1+x}{p}$ . C'est à dire

$$\begin{cases} px + y - z = p \\ -\frac{1}{p}x + y + z = \frac{1}{p} \end{cases} \quad . \text{ Il s'agit de l'intersection de 2 plans non parallèles et donc d'une droite.}$$

Ainsi les points de  $\Sigma$  d'abscisse  $\neq \pm 1$  sont décrits par une réunion de droites.

Le cas  $x = \pm 1$  est facile : on obtient  $y = \pm z$  et  $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm z \end{cases}$  est la réunion de 4 droites.

**Coin culture**

Si on échange  $(1 - x)$  et  $(1 + x)$  dans le raisonnement précédent, on obtient une autre famille de droites génératrices, disjointe de la première (aucune droite n'est dans les deux familles). On peut prouver que ces deux familles sont les seules familles de génératrices de  $\Sigma$ .

**III.1.4 Proposition**

Soit  $S$  une surface réglée. En un point régulier  $M_0$ , le plan tangent contient la génératrice passant par  $M_0$ .

**Preuve.**

Avec les notations de la définition,  $\frac{\partial M}{\partial k}(k, t) = u(t)$  est un des vecteurs qui engendre la direction du plan tangent. ■

**III.1.5 Exemple (Un cône)**

On considère l'ellipse  $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  et le point  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Donner une représentation de la surface réglée  $\Sigma$

engendrée par les droites qui passent par  $A$  et un point de  $\mathcal{C}$ .

On peut donner une représentation paramétrique facilement, car les droites  $\mathcal{D}_t$  qui sont génératrices de  $\Sigma$  sont de la forme  $\mathcal{D}_t = A + \text{Vect} \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ 2 \sin(t) - 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Trouvons une équation cartésienne. On a, pour les points de  $\Sigma$ ,  $\begin{cases} x = 1 + k(\cos t - 1) \\ y = 1 + k(2 \sin(t) - 1) \\ z = 1 - k \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = k \cos t \\ y - z = 2k \sin t \\ k = 1 - z \end{cases} .$

Ainsi les points de  $\Sigma$  vérifient  $4(x - z)^2 + (y - z)^2 = 4(1 - z)^2$  (on a une inclusion, on peut vérifier la deuxième d'une manière similaire au raisonnement fait sur la sphère en posant  $k = 1 - z$ ).

### III.1.6 Définition

1. Un **cône** est une surface engendrée par toutes les droites passant par un point fixe  $\Omega$  et un point d'une courbe  $\Gamma$ .
2. Un **cylindre** est une surface engendrée par toutes les droites dirigée par  $\vec{u}$  fixé et passant par un point d'une courbe  $\Gamma$ .

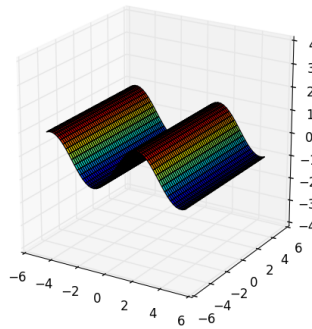
#### Remarque

Quand  $\Gamma$  est un cercle et le projeté orthogonal de  $\Omega$  est le centre de ce cercle, on obtient le cône "sablier" usuel. Dans le cas où  $\vec{u}$  est normal au plan contenant le cercle  $\Gamma$ , on obtient un cylindre de section circulaire. Mais ce ne sont pas les seuls cônes et cylindres !

#### Exercice 21

On prend  $\vec{u} = \vec{j}$  et  $\Gamma$  paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \sin(t) \end{cases}$  (d'équation  $z = \sin(x)$  et  $y = 0$ ). Donner une représentation paramétrée et une équation.

Une équation est  $z = \sin(x)$  et une représentation paramétrée est  $M(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sin(u) \end{pmatrix}$  (un paramètre pour la courbe, un pour le coefficient de  $\vec{u}$ ).



## III.2 Surfaces de révolution

### III.2.1 Définition

On appelle surface de révolution la surface  $S$  obtenue par rotation d'une courbe  $\Gamma$  par rotation autour d'une droite  $\Delta$ .

- $\Delta$  est l'axe de  $S$ .
- Les intersections de  $S$  avec les plans orthogonaux à  $\Delta$  sont soit vides soit des cercles d'axe  $\Delta$  que l'on appelle parallèles de  $S$ .
- Un plan méridien de  $S$  est un plan qui contient  $\Delta$ .
- Une méridienne de  $S$  est l'intersection de  $S$  avec un demi-plan, méridien délimité par  $\Delta$ .

#### Axe $(Oz)$ et coordonnées cylindriques

Dans le cas où  $\Gamma$  est donné par une courbe paramétrée  $f$  et  $\Delta = (Oz)$ , on peut utiliser les coordonnées cylindriques pour paramétrer  $S$ .

En effet,  $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$  ssi il existe un point  $f(t)$  tel que  $d(M, (Oz)) = d(f(t), (Oz))$  et  $z = z(t)$ . Ainsi, en

coordonnées cylindriques,  $\rho = \rho(t)$  et  $z = z(t)$  donc  $M = \begin{pmatrix} \rho(t) \cos(\theta) \\ \rho(t) \sin(\theta) \\ z(t) \end{pmatrix}$ .

#### III.2.2 Exemple

On considère le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , de rayon 1 contenu dans le plan  $(xOz)$ .



Donner une paramétrisation et une équation de la surface de révolution de  $\mathcal{C}$  autour de  $\Delta = (Oz)$ .

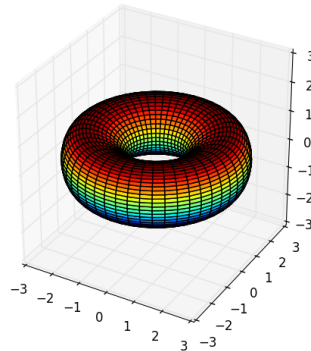
Une paramétrisation de  $\mathcal{C}$  est  $\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 2 + \cos(t) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \sin(t) \end{cases}$ .

$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$  ssi il existe  $t$  tel que  $d(M, (Oz)) = d(\gamma(t), (Oz))$  et  $\overrightarrow{M\gamma(t)} \perp (Oz)$  ie  $\rho = \rho(t)$  et  $z = z(t)$ . Ainsi

$$M = \begin{pmatrix} \rho(t) \cos(\theta) \\ \rho(t) \sin(\theta) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ où } \rho(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = |x(t)| = 2 + \cos(t).$$

Finalement,  $M = \begin{pmatrix} (2 + \cos(t)) \cos(\theta) \\ (2 + \cos(t)) \sin(\theta) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$  pour un  $t, \theta \in [-\pi, \pi]^2$ .

De plus, on a  $x^2 + y^2 = (2 + \cos(t))^2$  donc  $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$  et on a trouvé une surface  $\Sigma$  qui contient  $S$ .



### Cas général

Dans le cas général, il faut traduire les conditions :  $M \in S$  ssi il existe  $M_0 \in \Gamma$  tel que  $d(M, \Delta) = d(M_0, \Delta)$  et  $(\overrightarrow{MM_0} | \vec{u}) = 0$  où  $\vec{u}$  dirige  $\Delta$ .

Il s'agit ensuite, pour obtenir une équation cartésienne d'éliminer les coordonnées de  $M_0$  ( ou son paramètre) de ses équations. Plus facile à dire qu'à faire dans le cas général.

#### III.2.3 Exemple

Montrer que la surface  $S : x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$  est de révolution autour de  $(Oz)$ .

En coordonnées cylindriques, l'équation devient  $\rho^2 = z^2 - 1$ . Donc en posant  $z = u$  comme paramètre, on obtient bien une paramétrisation d'une surface de révolution :  $M(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{u^2 - 1} \cos v \\ \sqrt{u^2 - 1} \sin v \\ u \end{pmatrix}$  pour un  $u \in \mathbb{R} \setminus ]-1, 1[$  et  $v \in [-\pi, \pi]$ .

Une représentation paramétrique d'un méridienne peut être  $t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{t^2 - 1} \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$



# Chapitre 16

## Courbes paramétrées

Dans tout ce cours,  $I$  désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

### I Etude de courbes : rappels

#### I.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

##### I.1.1 Définition

Une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$  dans  $\mathbb{R}^2$  est une fonction  $f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto M(t) \end{cases}$ . Le **support** de la courbe est  $f(I)$  (l'ensemble des points  $M(t)$ , ou encore la trajectoire du point  $M$ ).

##### I.1.2 Définition

Soit  $f$  une courbe  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$  et  $t_0 \in I$ . Si  $f'(t_0) \neq \vec{0}$ , on dit que le point  $t_0$  est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de  $f$  sont régulier,  $f$  est dite régulière.

#### Courbes représentatives

Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  (numérique). On considère la courbe  $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ .

Le support de  $f$  est alors  $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \mid t \in I \right\}$ , c'est à dire la courbe représentative de la fonction  $\varphi$  ! De plus,  $f$  est régulière.

Question subsidiaire : que dire de la courbe paramétrée  $g : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ t \end{pmatrix}$  ?

#### I.2 Tangentes, variations

##### I.2.1 Théorème

Si  $t_0$  est un point régulier de la courbe  $f$  alors  $f$  possède une tangente en  $t_0$  dirigée par  $f'(t_0)$ .

#### I.3 Points singuliers

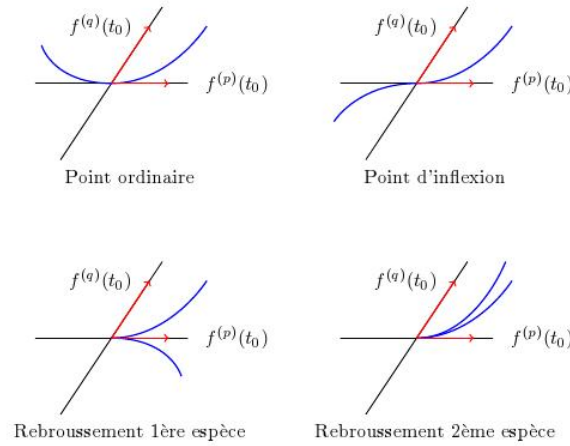
##### Rappels

Pour une courbe  $f$  de classe  $\mathcal{C}^k$  et un paramètre fixé  $t_0$ , lorsqu'on veut étudier l'allure de la courbe au point  $M_0 = f(t_0)$ , on calcule l'entier  $p$  qui est le plus petit entier **non nul** tel que  $f^{(p)}(t_0) \neq 0$  puis l'entier  $q$  qui est le plus petit entier strictement supérieur à  $p$  tel que  $f^{(q)}(t_0)$  n'est pas colinéaire à  $f^{(p)}(t_0)$ . La tangente en  $M_0$  est alors dirigée par  $f^{(p)}(t_0)$  et passe par  $M_0$ .

Dans le cas (classique)  $p = 1$  et  $q = 2$ , c'est à dire que la vitesse et l'accélération sont non colinéaires (et donc toutes les deux non nulles), on dit que  $M_0$  est un point birégulier.

##### Etude locale

Suivant la parité de  $p$  et  $q$  on obtient les 4 cas suivants.

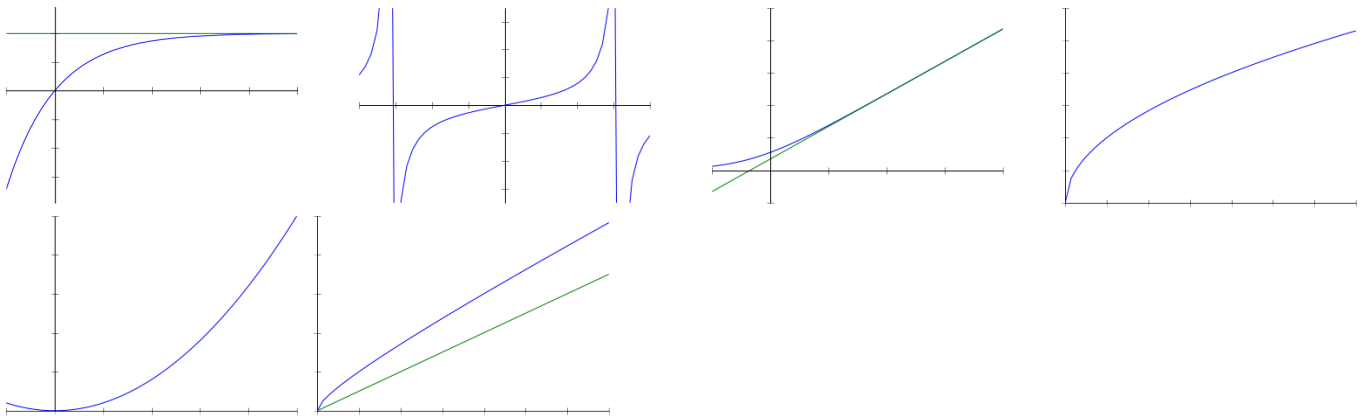


### I.4 Branches infinies

#### I.4.1 Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée et  $a \in \bar{I}$ . On dit que  $f$  possède une branche infinie au voisinage de  $a$  si  $x$  et  $y$  admettent une limite en  $a$  et qu'on est dans un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote horizontale (seulement  $y(t)$  tend vers l'infini) ou verticale (seulement  $x(t)$  tend vers l'infini).
2. ces deux limites sont infinies.
  - (a) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$  alors on dit que  $f$  possède une branche parabolique de direction  $(Ox)$ .
  - (b) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$  alors on dit que  $f$  possède une branche parabolique de direction  $(Oy)$ .
  - (c) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$  il y a deux cas
    - i. si  $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$  alors on dit que la droite  $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$  est asymptote à  $f$ .
    - ii. sinon on dit que  $f$  admet une branche parabolique de pente  $m$ .



## II Etude métrique

### II.1 Longueur d'une courbe

#### Notion intuitive de longueur

Longueur de la courbe entre les points de paramètres  $t$  et  $t + dt$  est  $\approx \|f'(t)\|dt = \text{vitesse} \times \text{temps}$ . Si on intègre entre  $a$  et  $b$ , on trouve donc la longueur de la courbe entre les points de paramètres  $a$  et  $b$ .

#### II.1.1 Définition

Soient  $a, b \in I$ . On appelle longueur (algébrique) de  $f \in C^1(I, \mathbb{R})$  entre les points  $a$  et  $b$  le réel  $\int_a^b \|f'(t)\|dt$ .

### II.1.2 Exemple

1. Calculer la longueur du cercle trigonométrique.
2. Calculer la longueur de l'arc de la parabole  $y = x^2$  entre les abscisses 0 et 2.

On considère la courbe paramétrée  $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$  dont le support est cette parabole. En effet,  $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  vérifie  $y = x^2$  ssi il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $x = t$  et  $y = x^2 = t^2$ .  $f$  est une courbe  $\mathcal{C}^1$  et on a  $f' : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

La longueur  $l$  cherchée vaut donc  $l = \int_0^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt$ . On sait que  $x \mapsto \text{sh}(x)$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On veut poser une nouvelle variable  $u$  telle que  $2t = \text{sh}(u)$  (qui est un changement de variable  $\mathcal{C}^1$  et bijectif) ie  $t = \frac{1}{2} \text{sh}(u)$ . On pose  $\alpha$  tel que  $\frac{1}{2} \text{sh}(\alpha) = 2$  ie  $\text{sh} \alpha = 4$ . On a de plus  $dt = \frac{1}{2} \text{ch}(u) du$

Alors  $l = \int_0^\alpha \sqrt{1 + \text{sh}^2(u)} \frac{1}{2} \text{ch}(u) du = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \text{ch}^2(u) du$  car  $\text{ch}$  est positive et  $\text{ch}^2 = 1 + \text{sh}^2$ .

Ainsi

$$l = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{e^{2u} + 2 + e^{-2u}}{4} du = \frac{1}{8} \left[ \frac{e^{2u}}{2} + 2u - \frac{e^{-2u}}{2} \right]_0^\alpha = \frac{e^{2\alpha} + 4\alpha - e^{-2\alpha}}{16}$$

Or on a  $e^\alpha - e^{-\alpha} = 8$  car  $\text{sh}(\alpha) = 4$ . Ainsi  $(e^\alpha)^2 - 8e^\alpha - 1 = 0$ . En considérant que l'inconnue est  $e^\alpha$ , on trouve que le discriminant est  $68 = 4 \times 17$ . Ainsi  $e^\alpha = \frac{8+2\sqrt{17}}{2} = 4 + \sqrt{17}$  (l'autre racine du trinôme est strictement négative). On en déduit que  $\alpha = \ln(4 + \sqrt{17})$  et  $e^{2\alpha} = 8e^\alpha + 1 = 33 + 8\sqrt{17}$ . De plus,  $e^{-\alpha} = e^\alpha - 8 = \sqrt{17} - 4$  et donc  $e^{-2\alpha} = 1 - 8e^{-\alpha} = 33 - 8\sqrt{17}$ .

Finalement  $l = \frac{33+8\sqrt{17}+4\ln(4+\sqrt{17})-(33-8\sqrt{17})}{16} = \sqrt{17} + \frac{1}{4} \ln(4 + \sqrt{17})$ .

On peut aisément vérifier en python

```
import scipy.integrate as sci
import numpy as np
def f(t):
    return np.sqrt(1 + 4*t**2)

sci.quad(f, 0, 2) # valeur approchée de l'intégrale de f entre 0 et 2
np.sqrt(17) + np.log(4 + np.sqrt(17))/4
```

### II.1.3 Exemple

Longueur de la cycloïde sur  $[-\pi, \pi]$  définie par  $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$ . On trouve  $\|f'(t)\| = 2|\sin \frac{t}{2}|$ .

Alors la longueur cherchée est  $\int_{-\pi}^\pi 2|\sin \frac{t}{2}| dt = 4 \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt$  car  $t \mapsto |\sin \frac{t}{2}|$  est paire et  $\forall t \in [0, \pi] \sin \frac{t}{2} \geq 0$ .

On obtient donc  $4 \left[ -2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 8$ , qui la longueur d'une arche de cette cycloïde.

## II.2 Abscisse curviligne

On considère maintenant  $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$  une courbe **régulière** (la vitesse ne s'annule pas), avec  $k \geq 1$ .

### II.2.1 Définition

Soit  $t_0 \in I$ .

On appelle abscisse curviligne de  $f$  d'origine  $t_0$  la fonction  $s : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du \end{cases}$ .

### Remarque

L'information connue *a priori* sur  $s$  est la dérivée :  $\frac{ds}{dt} = \|f'\|$ . Elle ne dépend pas de l'origine choisie. Dans la suite on supposera choisie une origine.

### II.2.2 Proposition

On considère une courbe régulière  $f$  de classe  $\mathcal{C}^k$ .

L'abscisse curviligne d'origine  $t_0$  est un  $\mathcal{C}^k$  difféomorphisme de  $I$  sur son image, c'est à dire que c'est une bijection  $\mathcal{C}^k$  dont la réciproque est  $\mathcal{C}^k$ .

**Preuve.**

Rappelons que l'application  $N : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Ainsi  $g : t \mapsto \|f'(t)\|$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  sur  $I$  car  $f'$  ne s'annule pas. On a même  $\forall t \in I \ g(t) > 0$ .

De plus,  $s : t \mapsto \int_{t_0}^t g(u)du$  est la primitive de  $g$  qui s'annule en  $t_0$  et est donc de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ . Comme  $s' = g > 0$ ,  $s$  est strictement croissante et  $s : I \rightarrow s(I)$  est bien une bijection.

Comme  $s'$  ne s'annule pas,  $s^{-1}$  est également de classe  $\mathcal{C}^k$ . Pour mémoire, on a  $\forall x \in s(I) \ (s^{-1})'(x) = \frac{1}{s'(s^{-1}(x))}$ . ■

**Paramétrage par l'abscisse curviligne**

Notons  $J = s(I)$ . Le résultat précédent permet de définir une nouvelle courbe de même support  $g : \begin{cases} J & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto f(s^{-1}(u)) \end{cases}$ .

On a en fait changé la manière de parcourir la même trajectoire, et on obtient immédiatement  $\left\| \frac{dg}{du} \right\| = 1$  (paramétrage normal). Remarquons que  $u = s(t) \Rightarrow g(u) = f(t)$ .

**Notation**

La relation  $\left\| \frac{dg}{du} \right\| = 1$  est classiquement notée  $\left\| \frac{df}{ds} \right\| = 1$ , pour indiquer que le paramétrage choisi est celui par l'abscisse curviligne. On a maintenant  $\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds} = f' \times \frac{1}{\|f'\|}$ .

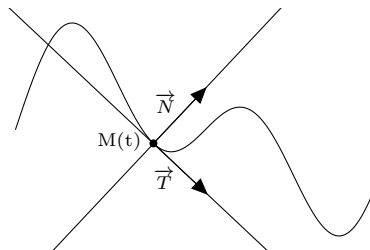
Si on paramètre  $f$  par  $s$ , on repère en fait les points de la trajectoire non plus par le temps de parcours, mais par la distance depuis l'origine. Il semble cohérent que le vecteur vitesse soit de norme 1.

**II.3 Repère de Frenet**

**II.3.1 Définition**

Soit  $t \in I$ . On note  $\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$  (vecteur unitaire tangent de  $f$  en  $t$ ) et  $\vec{N}(t)$  (vecteur unitaire normal de  $f$  en  $t$ ) le vecteur unitaire directement orthogonal à  $\vec{T}(t)$ .

Le repère  $(f(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$  est appelé repère de Frenet de  $f$  en  $t$ .



**II.3.2 Théorème (Détermination angulaire)**

Il existe une fonction  $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$  telle que

$$\forall t \in I \ \vec{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j} = \vec{u}_{\alpha(t)}.$$

Ainsi  $\alpha(t)$  est l'angle entre  $\vec{i}$  et  $\vec{T}(t)$ .

**Preuve.**

Hors programme.

On considère la fonction  $g : I \rightarrow \mathbb{C}$  qui à  $t$  associe l'affixe de  $\vec{T}(t)$ . On a  $\|\vec{T}(t)\| = 1$  et donc  $|g(t)| = 1$ . Il s'agit de montrer que  $\forall t \in I \ g(t) = e^{i\alpha(t)}$  et que la fonction  $\alpha$  est  $\mathcal{C}^{k-1}$ . On sait que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

On a  $g\bar{g} = 1$  et en dérivant on obtient  $g'\bar{g} + g\bar{g}' = 0$ , c'est à dire que la fonction  $g'\bar{g} = \frac{g'}{g}$  (si  $|z| = 1$  alors  $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ) est imaginaire pure.

On fixe  $t_0 \in I$ . Soit  $\theta : t \mapsto -i \int_{t_0}^t \frac{g'(t)}{g(t)} dt$ . Alors  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  et est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$

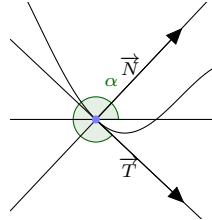
$$\text{On a alors } \left( \frac{e^{i\theta(t)}}{g(t)} \right)' = \frac{i\theta'(t)e^{i\theta(t)}g(t) - e^{i\theta(t)}g'(t)}{g^2(t)} = \frac{e^{i\theta(t)}}{g^2(t)}(g'(t)g(t) - g(t)g'(t)) = 0$$

Ainsi  $t \mapsto \frac{e^{i\theta(t)}}{g(t)}$  est une fonction constante sur l'intervalle  $I$ .

$$g(t) = Ke^{i\theta(t)}$$

avec  $g(t_0) = K = e^{i\alpha}$  car  $|g(t_0)| = 1$  et donc  $g(t) = e^{i(\alpha+\theta(t))}$  et  $\alpha = a + \theta \in \mathcal{C}^{k-1}$  convient ! ■

**Illustration**



**II.3.3 Proposition**

1. On a alors  $\vec{N}(t) = -\sin \alpha(t)\vec{i} + \cos \alpha(t)\vec{j} = \vec{v}_{\alpha(t)}$
2. Comme  $\vec{T} = \frac{df}{ds}$ , on en déduit que  $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$  et  $\frac{dy}{ds} = \sin \alpha$ .

**II.3.4 Exemple**

Déterminer la fonction  $t \mapsto \alpha(t)$  pour la courbe représentative de l'exponentielle.

On considère la courbe paramétrée associée  $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$  qui est une courbe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  dont la dérivée vaut  $f' : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $f$  est bien une courbe régulière.

Reprenons la définition de  $\alpha$ . Pour cela il nous faut calculer le repère de Frenet en tout point. On a, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}$  et donc  $\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} \begin{pmatrix} -e^t \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On cherche  $\alpha(t)$  tel que  $\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\alpha(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a donc  $\cos(\alpha(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$  et  $\sin(\alpha(t)) = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}$ .

Ainsi (et c'est cohérent avec le tracé),  $\cos(\alpha(t)) > 0$  et  $\sin(\alpha(t)) > 0$ . On peut prendre  $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)$  ou  $\alpha(t) = \arcsin\left(\frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)$  ou même, comme  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$   $\alpha(t) = \arctan(e^t)$ .

**II.4 Courbure**

**II.4.1 Définition**

On appelle courbure la dérivée de la fonction  $\alpha$  par rapport à  $s$  :

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$$

Comme  $\alpha$  est un angle, il n'a pas d'unité.  $\gamma$  s'exprime donc en  $m^{-1}$ .

**Interprétation**

1. Si  $\gamma > 0$ , c'est que la détermination angulaire croît, c'est à dire que la courbe tourne vers la gauche.
2. Si  $\gamma < 0$ , c'est que la détermination angulaire décroît, c'est à dire que la courbe tourne vers la droite.
3. Si  $\gamma$  est grand en valeur absolue, c'est que  $\alpha$  change rapidement, c'est à dire que la courbe tourne "vite".

**II.4.2 Théorème (Formules de Frenet)**

On a

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N} \text{ et } \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma\vec{T}$$

**Preuve.**

$$\text{On a } \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \gamma \vec{N}. \quad \blacksquare$$

**II.4.3 Exemple**

Calculer l'expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération en fonction de  $\vec{T}, \vec{N}, \gamma$ . On note  $v = \|f'\|$  et  $\vec{v} = f'$ . Alors  $\vec{v} = v\vec{T}$  par définition de  $\vec{T}$ .

$$\text{De plus, } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v^2\gamma\vec{N}.$$

**II.4.4 Exemple**

1. Courbure du cercle de centre  $O$  et de rayon  $R > 0$ . On trouve  $\gamma = \frac{1}{R}$  (une fonction constante).

2. Pour la cycloïde, sur  $] -\pi, \pi[$ , on avait  $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\sin \frac{t}{2}}$ .

$$\text{Ainsi } \vec{T} = \frac{1}{2\sin \frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{2} \\ \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}. \text{ Donc } \vec{N} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{De plus, } \frac{dT}{ds} = \frac{ds}{dt} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2\sin \frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix} \text{ et donc } \gamma(t) = \frac{-1}{4\sin \frac{t}{2}}.$$

**Dans le repère de Frenet**

Si on calcule  $[\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}]$  (produit mixte, c'est le déterminant dans le plan qui ne dépend pas du ROND choisi pour le calculer), on obtient  $\gamma$  en prenant les coordonnées dans la base de Frenet.

$$\text{Hors, } \vec{T} = \frac{1}{\|f'\|} f' \text{ et } \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{\|f'\|} \times \left( \left( \frac{1}{\|f'\|} \right)' f' + \frac{1}{\|f'\|} f'' \right).$$

Ainsi  $\gamma = \left[ \frac{1}{\|f'\|} f', \frac{1}{\|f'\|} \times \left( \left( \frac{1}{\|f'\|} \right)' f' + \frac{1}{\|f'\|} f'' \right) \right] = \left[ \frac{1}{\|f'\|} f', \frac{1}{\|f'\|^2} f'' \right] = \frac{1}{\|f'\|^3} [f', f'']$  (linéarité + caractère alterné). Finalement

$$\gamma = \left( \frac{dt}{ds} \right)^3 \left[ \frac{d\vec{OM}}{dt}, \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right]$$

**II.4.5 Exercice**

Traduire cette formule en fonction des fonctions coordonnées  $x, y$ . Et si  $f$  est la courbe  $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$  ?

**III Enveloppe, développée****III.1 Courbe développée****III.1.1 Définition**

Un point d'une courbe paramétrée est dit birégulier ssi les vecteurs vitesse et accélération en ce point ne sont pas colinéaires. On a donc (avec les notations classiques) les entiers  $p$  et  $q$  qui valent  $p = 1$  et  $q = 2$ .

**III.1.2 Proposition**

Pour une courbe  $\mathcal{C}^2$ , le point de paramètre  $t$  est birégulier ssi  $\gamma(t) \neq 0$ .

**Preuve.**

Il s'agit juste d'une redite du calcul de  $\gamma(t) = \frac{1}{\|f'(t)\|^3} [f'(t), f''(t)]$ . ■

**III.1.3 Définition**

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$  une courbe birégulière (tous les points sont biréguliers). Le rayon de courbure au point  $t$  est  $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$  et le centre de courbure est le point  $C(t) = M(t) + R(t)\vec{N}(t)$  ie  $\overrightarrow{MC} = R\vec{N}$ .

On peut évidemment repérer  $M$  par son abscisse curviligne et exprimer toutes les quantités en fonction de  $s$ .

**Interprétation**

Au point de paramètre  $t_1 \in I$ , le cercle tangent en  $\overrightarrow{T}(t_1)$  qui "ressemble" le plus à la courbe est le cercle centré en  $C(t_1)$  et de rayon  $R(t_1)$ . On l'appelle cercle de courbure en  $t_1$ .

**III.1.4 Définition**

Le lieu des centres de courbure d'une courbe s'appelle la courbe développée. C'est la courbe  $t \mapsto C(t)$ .



**III.1.5 Exemple**

Prenons comme courbe l'ellipse  $f : t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = M(t)$  sur  $[-\pi, \pi]$ . Trouvons sa courbe développée.

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $t \in [-\pi, \pi]$ .  $f'(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$  et donc

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2(t) + \cos^2(t)}} \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Trouvons  $\gamma$ .

$$\text{On a } \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\|f'(t)\|} \frac{d\vec{T}}{dt}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds}(t) &= \frac{1}{\sqrt{3 \sin^2(t) + 1}} \left( -\frac{1}{2} \frac{6 \cos(t) \sin(t)}{(3 \sin^2(t) + 1)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3 \sin^2(t) + 1}} \begin{pmatrix} -2 \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(3 \sin^2(t) + 1)^2} \left( -3 \cos(t) \sin(t) \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + (3 \sin^2(t) + 1) \begin{pmatrix} -2 \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(3 \sin^2(t) + 1)^2} \begin{pmatrix} 6 \cos(t) \sin^2(t) - 6 \sin^2(t) \cos(t) - 2 \cos(t) \\ -3 \cos^2(t) \sin(t) - 3 \sin^3(t) - \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(3 \sin^2(t) + 1)^2} \begin{pmatrix} -2 \cos(t) \\ -4 \sin(t) \end{pmatrix} = \frac{2}{(3 \sin^2(t) + 1)^{\frac{3}{2}}} \vec{N} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \gamma(t) = \frac{2}{(3 \sin^2(t) + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Maintenant, le centre de courbure vérifie  $C(t) = M(t) + \frac{1}{\gamma(t)} \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{3 \sin^2(t) + 1}{2} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -2 \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cos(t) - \frac{3}{2} \cos(t) \sin^2(t) \\ -3 \sin^3(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ -2 \sin^3(t) \end{pmatrix}$  et on reconnaît une astéroïde.

**III.1.6 Exemple**

Calculons la développée de la cycloïde (sur  $] -\pi, \pi[$ , le reste s'obtenant par translation).

Ici  $M(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$ . De plus,  $R(t) = -4 \sin \frac{t}{2}$  et  $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}$ .

Ainsi  $C(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2(1 - \cos(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \sin(t) \\ -1 + \cos(t) \end{pmatrix}$ . On obtient une autre cycloïde.

**III.2 Enveloppe****III.2.1 Définition**

Soit  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$  une famille de droite. On dit que  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$  admet la courbe  $f : t \mapsto M(t)$  comme enveloppe ssi pour tout  $t \in I$  on a

1.  $M(t) \in \mathcal{D}_t$
2.  $\mathcal{D}_t$  est tangente à  $f$  en  $M(t)$ .

**Mise en équation**

On se donne un points  $A(t)$  et un vecteur directeur  $\vec{u}(t)$  pour chaque droite  $\mathcal{D}_t$ . Ainsi  $\mathcal{D}_t = \{A(t) + \lambda \vec{u}(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = A(t) + \text{Vect}(\vec{u}(t))$ .

On cherche donc à écrire  $M(t) = A(t) + \lambda(t) \vec{u}(t)$  et il faut en plus que la tangente en  $M(t)$  soit dirigée par  $\vec{u}(t)$ .

On suppose les fonctions en jeu dérivables et on obtient  $\frac{d\vec{OM}}{dt} = A'(t) + \lambda'(t) \vec{u}(t) + \lambda(t) \vec{u}'(t)$ . La condition de tangence devient  $[\frac{d\vec{OM}}{dt}, \vec{u}(t)] = 0$  qui peut se récrire  $[A'(t) + \lambda(t) \vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$  (le déterminant est alterné).

**III.2.2 Proposition**

Une enveloppe de la famille  $\mathcal{D}_t = A(t) + \text{Vect}(\vec{u}(t))$  est donnée par  $f : t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t) \vec{u}(t)$  où  $\lambda$  est une fonction vérifiant  $[A'(t) + \lambda(t) \vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$ .

**III.2.3 Exemple**

Cherchons l'enveloppe de la famille de droites  $\mathcal{D}_t : x - \cos(t)y - \sin(t) = 0$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}$  on a  $D_t = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}\right) = A(t) + \text{Vect}(\vec{u}(t))$ .

On cherche  $\lambda(t)$  tel que  $M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$  et vérifiant  $\det_{\mathcal{B}_e}(M'(t), \vec{u}(t)) = 0$ . Alors la fonction  $\lambda$  vérifie  $\det(A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = 0$  ie  $\begin{vmatrix} \cos(t) - \lambda(t)\sin(t) & \cos(t) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  ou encore  $\cos(t) - \lambda(t)\sin(t) = 0$ .

Pour  $t \notin \{-\pi, 0, \pi\}$ ,  $\lambda(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$  et on obtient  $M(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \\ \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) + \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \\ \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin(t)} \\ \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \end{pmatrix}$ .

On peut tracer au remarquer que tous les points de la courbe vérifient  $x^2 - y^2 = 1$ . On connaît les symétries de cette courbes qui correspondent à celles de l'enveloppe calculée.

De plus, si on prend  $x, y \geq 0$  tels que  $x^2 - y^2 = 1$  alors  $x^2 = 1 + y^2 \geq 1$  et donc  $|x| \geq 1$ . Ainsi on peut poser un  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}]$  tel que  $\frac{1}{x} = \sin(t)$  et donc  $x = \frac{1}{\sin(t)}$ . On a alors  $y^2 = x^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2(t)} - 1 = \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}$ . Ainsi  $y = \pm \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$  et comme  $y \geq 0$ ,  $y = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ .

Finalement, on peut paramétrer notre quart d'hyperbole pour être la courbe enveloppe calculée et le tracé est maintenant immédiat.

### III.2.4 Proposition

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$  une courbe birégulière. La courbe développée de  $f$  est également l'enveloppe de la famille  $\mathcal{D}_t = M(t) + \text{Vect}(\vec{N}(t))$  (la famille des normales).

On peut remplacer le vecteur  $\vec{N}(t)$  par n'importe quel vecteur proportionnel et non nul.

#### Preuve.

Notons  $g : s \mapsto C(s) = M(s) + R(s)\vec{N}(s)$  la courbe développée de  $f$  que l'on a paramétré par l'abscisse curviligne. Clairement chaque point de  $g$  est sur une normale.

Il reste à montrer que les normales sont tangentes à  $g$ . Or  $\frac{d\vec{OC}}{ds} = \vec{T} + \frac{dR}{ds}\vec{N} + R \times (-\gamma\vec{T}) = \frac{dR}{ds}\vec{N}$ . Ainsi les tangentes à  $g$  sont dirigées par  $\vec{N}$ . ■

### III.2.5 Exemple

Calculons la développée de la demi-hyperbole paramétrée par  $x(t) = \text{ch}(t)$  et  $y(t) = \text{sh}(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .

On note  $f : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  qui est  $\mathcal{C}^\infty$ . De plus, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t) = \begin{pmatrix} \text{sh}(t) \\ \text{ch}(t) \end{pmatrix}$  et donc  $\vec{N}(t)$  est proportionnel à  $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -\text{ch}(t) \\ \text{sh}(t) \end{pmatrix}$ .

On cherche donc une courbe notée  $M$  qui vérifie  $M(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) \\ \text{sh}(t) \end{pmatrix} + \lambda(t) \begin{pmatrix} -\text{ch}(t) \\ \text{sh}(t) \end{pmatrix}$  pour une fonction  $\lambda$  telle que  $[f'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$ .

Cette équation peut s'écrire  $\begin{vmatrix} \text{ch}(t) - \lambda(t)\text{sh}(t) & -\text{ch}(t) \\ \text{sh}(t) + \lambda(t)\text{ch}(t) & \text{sh}(t) \end{vmatrix} = 0$  ou encore  $2\text{ch}(t)\text{sh}(t) + \lambda(t)(-\text{sh}^2(t) + \text{ch}^2(t)) = 0$  c'est à dire  $\lambda(t) = -2\text{ch}(t)\text{sh}(t)$ .

Finalement,  $M(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) + 2\text{ch}^2(t)\text{sh}(t) \\ \text{sh}(t) - 2\text{ch}(t)\text{sh}^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) + 2\text{sh}(t) + 2\text{sh}^3(t) \\ \text{sh}(t) + 2\text{ch}(t) - 2\text{sh}^3(t) \end{pmatrix}$

# Chapitre 17

## Fonctions de plusieurs variables

### I Continuité

On fixe deux entiers naturels  $p, n \geq 1$  qui valent 1, 2 ou 3 en pratique.

#### I.1 Notions de topologie

##### I.1.1 Définition

Soit  $r \in [0, +\infty[$  et  $X_0 \in \mathbb{R}^p$

1. La boule ouverte de rayon  $r$  et de centre  $X_0$  est  $B(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid \|X_0 - X\| < r\}$ .
2. La boule fermée de rayon  $r$  et de centre  $X_0$  est  $\overline{B}(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid \|X_0 - X\| \leq r\}$ .

##### Illustration

Lien avec la forme du domaine de convergence d'une série entière.

##### I.1.2 Définition-Proposition

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^p$ . Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. il existe  $X_0 \in \mathbb{R}^p$  et  $r > 0$  tels que  $A \subset \overline{B}(X_0, r)$ .
2. pour tout  $X_0 \in \mathbb{R}^p$  il existe  $r > 0$  tel que  $A \subset \overline{B}(X_0, r)$ .
3. il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall X \in A \ \|X\| \leq M$ .

Dans ce cas, on dit que  $A$  est une partie **bornée** de  $\mathbb{R}^p$ .

##### Preuve.

—  $1 \Rightarrow 2$ . On note  $X_0$  et  $r_0$  les objets dont l'existence est assurée par 1.

Soit  $X_1 \in \mathbb{R}^p$ . On doit trouver  $r_1 > 0$  tel que  $A \subset \overline{B}(X_1, r_1)$ . Or, pour  $X \in A$  on a déjà  $\|X_0 - X\| \leq r_0$ .

Alors  $\|X_1 - X\| = \|X_1 - X_0 + (X_0 - X)\| \leq \|X_1 - X_0\| + \|X_0 - X\| = \|X_1 - X_0\| + r_0$ . Comme  $\|X_1 - X_0\|$  ne dépend pas de  $X$ , on peut poser la constante  $r_1 = \|X_1 - X_0\| + r_0$  qui convient.

—  $2 \Rightarrow 3$ . Il suffit d'appliquer 2 à  $X_0 = 0_{\mathbb{R}^p}$  et alors  $M = r$  convient.

—  $3 \Rightarrow 1$ . De même,  $X_0 = 0$  et  $r = M + 1$  conviennent. ■

##### I.1.3 Exemple

Toute boule ouverte ou fermée est bornée.

$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$  est bornée,  $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \right\}$  n'est pas bornée.

##### I.1.4 Définition

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^p$ .

1. On dit que  $A$  est une partie **ouverte** de  $\mathbb{R}^p$  (on dit aussi que  $A$  est un ouvert) ssi

$$\forall X_0 \in A \exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset A$$

2. On dit que  $A$  est une partie **fermée** de  $\mathbb{R}^p$  ssi  $\overline{A}$  (son complémentaire) est une partie ouverte.

##### I.1.5 Exemple

Toute boule ouverte est un ouvert.

Toute boule fermée est un fermé.

Une couronne ouverte,  $\mathbb{R}^p$  sont des ouverts.

Le demi-plan  $y > 0$  est un ouvert.

### Interprétation intuitive

Dans un ouvert  $A$ , on peut toujours se placer “suffisamment proche” d’un point et rester dans  $A$ . Très pratique pour parler d’une fonction définie sur  $A$ .

Une première approche est de voir que pour un ouvert la “frontière” est exclue alors qu’elle est incluse dans un fermé.

#### I.1.6 Définition

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^p$  et  $X_0 \in \mathbb{R}^p$ .

1. On dit que  $X_0$  est un point intérieur à  $A$  ssi  $\exists r > 0 B(X_0, r) \subset A$ . En particulier  $X_0 \in A$ .
2. On dit que  $X_0$  est un point extérieur à  $A$  ssi  $\exists r > 0 B(X_0, r) \subset \mathbb{R}^p \setminus A$ . En particulier  $X_0 \notin A$  et  $X_0$  est un point du complémentaire de  $A$ .
3. On dit que  $X_0$  est un point adhérent à  $A$  ssi  $\forall r > 0 B(X_0, r) \cap A \neq \emptyset$ . Cette fois on a pas forcément  $X_0 \in A$ . Par contre  $X_0$  n’est pas extérieur à  $A$ .
4. On dit que  $X_0$  est un point frontière de  $A$  ssi  $X_0$  est à la fois adhérent et pas intérieur à  $A$ , ou encore pour tout  $r > 0$ , la boule ouverte  $B(X_0, r)$  a une intersection non vide avec l’intérieur et l’extérieur de  $A$ .

### Illustration graphique

Tracer les différents ensembles pour  $A$  la boule unité qui ne contient qu’une demi frontière :  $A = B(0, 1) \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 = 1 \right\}$ .

#### I.1.7 Proposition

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}^p$ . On note  $B = \mathbb{R}^p \setminus A$  le complémentaire de  $A$ . Soit  $X_0 \in \mathbb{R}^p$

1.  $X_0$  est intérieur à  $A$  ssi  $X_0$  n’est pas adhérent à  $B$ .
2.  $X_0$  est adhérent à  $A$  ssi  $X_0$  n’est pas intérieur à  $B$ .
3.  $A$  est ouvert ssi tout point de  $A$  est intérieur à  $A$ .
4.  $A$  est fermé ssi tout point adhérent à  $A$  est un point de  $A$ .
5. Tout point de  $A$  est adhérent à  $A$ .
6. Tout point intérieur à  $A$  est un point de  $A$ .

#### Preuve.

Simple jeu avec les définitions. Bon exercice théorique pour vérifier la connaissance de celles-ci. ■

## I.2 Fonctions continues

### Représentation graphique

On considère une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  où  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Alors on peut considérer l’ensemble des points de l’espace vérifiant l’équation  $z = f(x, y)$ . Il s’agit de la surface représentative de  $f$ .

#### I.2.1 Définition

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soit  $\ell \in \mathbb{R}^n$ .

1. Soit  $a$  un point adhérent à  $A$ . On dit que  $f$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$  ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \ \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$$

Il faut comprendre  $\|x - a\|$  comme la norme dans  $\mathbb{R}^p$  et  $\|f(x) - \ell\|$  comme la norme dans  $\mathbb{R}^n$ .

2. Soit  $a \in A$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \ \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

$f$  est **continue** sur  $A$  ssi  $f$  est continue en tout point de  $A$ .

**I.2.2 Théorème**

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  où  $A \subset \mathbb{R}^p$ .

1. On note  $f = (f_1, \dots, f_n)$  les fonctions coordonnées de  $f$ .  $f$  est continue (en un point ou sur  $A$ ) si et seulement si toutes les  $f_i$  sont continues.
2. Une somme de fonctions continues est continue, le produit d'une fonction continue par un réel est continue ( $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel)
3. Si  $n = 1$  (fonctions à valeurs réelles), le produit de deux fonctions continues est encore continue. L'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas est continue.
4. Soit  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que  $f(A) \subset U$ . Si  $f$  et  $g$  sont continues alors  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  est continue sur  $A$ .

**Preuve.**

Reprenre les preuves de 1ère année en adaptant les notations. ■

**I.2.3 Exemple**

On considère des fonctions de deux variables.

1.  $(x, y) \mapsto x$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$
2.  $(x, y) \mapsto y$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$
3.  $(x, y) \mapsto x^2 + xy + 3xy^4$  est continue (par produits et sommes) et plus généralement toute fonction polynomiale en  $x, y$  est continue.
4.  $(x, y) \mapsto \sin(xy)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  par composition.

**Applications partielles**

Soit  $A \subset \mathbb{R}^p$ ,  $a = (a_1, \dots, a_p) \in A$ .

Les application partielles de  $f$  en  $a$  sont les fonctions  $f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$  (on fixe toutes les variables sauf la  $i$ ème) définie partout où c'est possible.

SI  $f$  est continue en  $a$  alors toutes les  $f_i$  sont continues en  $a_i$ . La réciproque est fausse, on peut montrer que

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases} \quad \text{n'est pas continue en } (0, 0) \text{ pourtant les deux applications partielles}$$

sont nulles donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

Indication : On se place sur l'arc paramétré  $x(t) = t, y(t) = t^2$  et on fait tendre  $t$  vers 0 : on se place arbitrairement près de  $(0, 0)$  mais  $f$  prend des valeurs arbitrairement grande.

**I.2.4 Théorème (Image d'un fermé borné)**

Soit  $A \subset \mathbb{R}^p$  fermée et bornée et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$

1. Si  $f$  est continue sur  $A$ , alors  $f(A)$  est une partie fermée et bornée de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Si  $n = 1$  et que  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes :  $\inf_{x \in A} (f(x)) = \min_{x \in A} (f(x))$  et  $\sup_{x \in A} (f(x)) = \max_{x \in A} (f(x))$ .

**Preuve.**

Totalement hors programme.

Posons  $B = f(A)$ . On veut montrer que  $B$  est bornée. Par l'absurde, supposons que  $B$  n'est pas bornée

—  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \exists y_n \in B \|y_n\| \geq n$ .

On peut ainsi créer une suite  $(y_n) \in B$  telle que  $\|y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Or, par définition, chaque  $y_n$  possède au moins un antécédent dans  $A$ . On en choisit un que l'on note  $x_n$ . Alors  $(x_n)$  est une suite d'éléments de  $A$  qui est borné et on peut alors (théorème de Bolzano-Weierstrass, appliqué  $p$  fois successivement), extraire une suite  $(x_{\varphi(n)})$  qui converge vers  $x \in \mathbb{R}^p$ .

— Montrons que le fait que  $A$  est fermé implique que  $x \in A$ . Déjà,  $x$  n'est pas extérieur à  $A$  car si on avait  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \cap A = \emptyset$  alors  $\|x_n - x\| > r$  pour tout  $n$  ce qui contredit  $x_n \rightarrow x$ . Ainsi  $x$  est adhérent à  $A$  d'après I.1.7. D'après cette même proposition et comme  $A$  est fermé,  $x \in A$ .

- Maintenant on a  $(x_{\varphi(n)}) \in A^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $x \in A$  et comme  $f$  est continue,  $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{+\infty} f(x) \in B$ .  
En posant  $y = f(x)$  on a deux choses :  $\|y_n\| \xrightarrow{+\infty} +\infty$  par construction et  $\|y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{+\infty} \|y\|$  par continuité de la norme (cette continuité est vraie par produits, sommes puis composition par  $\sqrt{\cdot}$ ).
- Contradiction

Ainsi  $B$  est borné. Montrons maintenant que  $B$  est fermé, c'est à dire que tout point adhérent de  $B$  est un point de  $B$ .

Soit  $b$  adhérent à  $B$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  on a donc (avec  $r = \frac{1}{n+1}$  dans la définition)  $B(b, \frac{1}{n+1}) \cap B \neq \emptyset$ . Notons  $b_n$  un élément de cette intersection. On a construit une suite  $(b_n)$  d'éléments de  $B$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N} \|b_n - b\| \leq \frac{1}{n+1}$  et donc  $b_n \xrightarrow{+\infty} b$ . Comme précédemment, on construit une suite  $(a_n)$  telle que  $f(a_n) = b_n$  pour tout  $n$  et on en extrait une suite qui converge vers  $a \in A$ . Alors par unicité de la limite,  $b = f(a)$  et donc  $b \in B$ .

Finalement,  $B$  est bien fermé en plus d'être borné. ■

### Remarque

Il s'agit de la version plusieurs variables du théorème important : l'image d'un segment par une application continue est un segment.

### I.2.5 Exemple

Voici des exemples de parties fermées et bornées :  $\overline{B}(a, r)$ ,  $[a, b] \times [c, d]$ .

## II Dérivées partielles

Ici, pour simplifier la rédaction, on fixe  $p = 3$ , il suffit d'enlever une variable pour retrouver le cas d'une fonction de deux variables.

### II.1 Dérivabilité

#### II.1.1 Définition

Soit  $f : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y, z) & \mapsto f(x, y, z) \end{cases}$  où  $U \subset \mathbb{R}^p$ . Soit  $a = (a_0, y_0, z_0)$  un point **intérieur** à  $U$ .

On dit que  $f$  possède une dérivée partielle par rapport à  $x$  en  $a = (x_0, y_0, z_0)$  ssi l'application partielle  $x \mapsto (x, y_0, z_0)$  (qui est définie sur un intervalle centré en  $x$  car  $a$  est intérieur) est dérivable en  $x_0$ . Ce nombre dérivé est alors noté  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$  ou  $\partial_1 f(x_0, y_0, z_0)$ .

On définit de même  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .

### Remarque

1. Il s'agit toujours de se ramener à une fonction d'une variable, en fixant les autres au point qui nous intéresse.

$$2. \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

### Attention

Même si  $f$  est définie sur une partie fermée, on ne parle de la dérivabilité qu'à l'intérieur de  $A$ . On pourra rencontrer des fonctions continues sur  $\overline{B}(0, 1)$  et dérivable seulement sur  $B(0, 1)$ .

#### II.1.2 Exemple

Calculer les dérivées partielles, si possible, pour :

1.  $f : (x, y, z) \mapsto \sin(2xy - yz)$ .
2.  $f : (x, y, z) \mapsto (x^2y + z, x^2 - y^2 + xz)$

#### II.1.3 Définition

Soit  $U$  un **ouvert** de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  ssi  $f$  possède 3 (ou 2) dérivées partielles sur  $U$  et que ces fonctions de 3 (ou 2) variables sont continues.

#### II.1.4 Exemple

Les fonctions précédentes sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$

**II.1.5 Définition**

Soit  $U \subset \mathbb{R}^p$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  (remarquez le cas  $n = 1$ ). Si  $f$  possède des dérivées partielles en  $(x, y, z) \in U$ , le gradient de  $f$  en  $(x, y, z)$  (noté  $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z)$ ) est le vecteur  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right)$ .

En physique, le gradient est parfois noté  $\nabla f$

**II.1.6 Exemple**

Calculer le gradient de la première fonction de l'exemple précédent. Attention à ne pas confondre avec les vecteurs obtenus en dérivant (partiellement) une fonction avec  $n > 1$ .

**II.2 Taylor-Young**

Cette fois, on énonce les théorèmes dans le cas  $n = 2$ , pour simplifier l'écriture.

**II.2.1 Théorème**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un fonction  $\mathcal{C}^1$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $(x_0, y_0) \in U$ . Pour  $(h, k)$  de norme "assez petite"

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o_{(h,k) \rightarrow (0,0)}(\|(h, k)\|)$$

**Preuve.**

Admis. ■

**Le petit o**

Il s'agit ici d'une fonction de 2 variables  $\varphi(h, k)$  telle que  $\frac{\varphi(h, k)}{\|(h, k)\|} \xrightarrow{(h, k, l) \rightarrow (0, 0, 0)} 0_{\mathbb{R}^n}$ .

**II.2.2 Exemple**

Ecrire la formule dans le cas de 3 variables.

**II.2.3 Corollaire**

Une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  est continue.

**Cas  $n = 1$** 

Dans le cas où  $f$  est à valeurs réelles, on obtient

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + (\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) | (h, k)) + o(\|(h, k)\|).$$

ou encore, en notant  $X_0 = (x_0, y_0)$ ,

$$f(X) = f(X_0) + (\overrightarrow{\text{grad}}(f)(X_0) | X - X_0) + o(\|X - X_0\|)$$

**II.2.4 Proposition (Composition)**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $U$  ouvert) et  $g : t \mapsto (x(t), y(t))$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $U$ .

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $\varphi = f \circ g : t \mapsto f(x(t), y(t))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et pour  $t \in I$

$$\varphi'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

**Preuve.**

Il s'agit d'appliquer la formule de Taylor-Young à  $\varphi(t+h) = f(x(t+h), y(t+h)) = f(x(t) + hx'(t) + o(h), y(t) + hy'(t) + o(h))$ .

On lit la valeur de  $\varphi'(t)$  comme facteur de  $h$ , d'après le cours de première année (car  $\varphi$  est une fonction d'une variable).

Or  $\varphi(t+h) = f(x(t), y(t)) + (hx'(t) + o(h)) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + (hy'(t) + o(h)) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) + o(\|hx'(t) + o(1), y(t) + o(1)\|)$ . Il s'agit maintenant de regrouper les différents  $o$  qui sont soit des  $o(h)$  soit des fonctions négligeables devant  $o(h)$ , pour obtenir le résultat voulu. ■

**II.2.5 Exemple**

On considère  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $g : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ . Calculer la dérivée de  $f \circ g$ . (évolution d'un champ scalaire le long du cercle unité).

**II.2.6 Proposition (Composition, changement de variables)**

On considère  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . Si  $g(V) \subset U$  et que les fonctions  $f, g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  alors  $f \circ g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$ .

Si on note  $f : (u_1, \dots, u_p) \mapsto f(u_1, \dots, u_p)$  et  $g : (x_1, \dots, x_m) \mapsto g(x_1, \dots, x_m)$  et  $g = (g_1, \dots, g_p)$  les fonctions coordonnées, alors  $f \circ g$  dépend des variables  $x_1, \dots, x_m$  et pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et  $a \in V$

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) \frac{\partial f}{\partial u_j}(g(a))$$

**Preuve.**

On dérive par rapport à une seule variable, que l'on peut noter  $t$  et on applique le théorème précédent. ■

**En pratique**

Pour appliquer cette formule, il faut soit utiliser la notation  $\partial_1, \partial_2$  ou alors bien différencier la manière dont on note les variables des fonctions en jeu

Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  de deux variables notées  $\alpha$  et  $\beta$  dans cet ordre.

On note  $\varphi : (x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$  une fonction composée de fonctions  $\mathcal{C}^1$ . Alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial \alpha}(u(x, y), v(x, y)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial \beta}(u(x, y), v(x, y))$$

**II.2.7 Exemple**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  (variables notées  $x, y$ ) de classe  $\mathcal{C}^1$ . Calculer les dérivées de  $\varphi : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ .

On trouve  $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$  et  $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$

**Dérivées d'ordre supérieur**

Comme pour les fonctions d'une variable, on peut évidemment continuer à dériver des dérivées partielles si elles sont encore dérivables.

La notation est la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

**II.2.8 Exemple**

Soit  $f : (x, y, z) \mapsto x \arctan(y^2 + z^2)$ .

Calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$

**II.2.9 Théorème (Théorème de Schwarz)**

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ , alors  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  (et de même avec toutes les autres variables éventuelles).

**II.3 Equations aux dérivées partielles****II.3.1 Exemple**

On souhaite résoudre l'équation  $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 1$ . Pour cela on effectue le changement de variable  $u = x + y, v = x - y$ .

On a donc  $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$ . Ceci revient à poser une nouvelle fonction  $g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = f(x, y)$ .

Ainsi  $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(u, v) - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = \frac{1}{2}$ . Ainsi  $g$  est une fonction constante si on ne considère que la variable  $v$ . Donc  $g(u, v) = \frac{v}{2} + K(u)$  où  $K$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  qui ne dépend que de la variable  $u$ .

Finalement, les solutions sont de la forme  $f(x, y) = \frac{x-y}{2} + K(x+y)$ .



**II.3.2 Exemple**

Chercher les solutions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  vérifiant (E) :  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$ . Pour cela on pourra passer en coordonnées polaires.

On pose  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ . avec  $r \in ]0, +\infty[$  et  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . On a alors  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ .

On pose  $g(r, \theta) = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Alors  $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r, \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r, \theta)$ . Ainsi (E) devient  $r \frac{\partial g}{\partial r} = \tan(\theta)$  ou encore  $\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{1}{r} \tan(\theta)$ .

Ainsi  $g(r, \theta) = \ln(r) \tan(\theta) + K(\theta)$  où  $K$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

Finalement,  $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \frac{y}{x} + C(\frac{y}{x})$ . où  $C$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$ .

**II.3.3 Exercice**

Résoudre l'équation précédente par changement de variable  $u = x$  et  $v = \frac{y}{x}$ .

**II.3.4 Exemple**

On considère l'équation de la chaleur  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ .  $c$  est une constante strictement positive représentant une vitesse de propagation. On travaille sur  $\mathbb{R}^2$ .

Résoudre en posant  $u = x + ct$  et  $v = x - ct$  et calculer la dérivée d'ordre 2 croisée. On a donc  $g(u, v) = f(x, t) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c})$ .

$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$  et donc  $\frac{\partial g}{\partial u} = K(u)$  et finalement  $g(u, v) = K_1(u) + K_2(v)$ .

**III Extremes****III.1 Points critiques**

Cette fois on suppose  $p = 2$  pour alléger les notations. On peut tout à fait généraliser.

**III.1.1 Définition**

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs réelles et  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Soit  $a_0 = (x_0, y_0) \in A$ . On dit que  $f$  possède un maximum local (resp. minimum local) ssi il existe un  $r > 0$  tel que

$$\forall (x, y) \in A \cap \overline{B}(a_0, r) \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

(resp.  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ).

**III.1.2 Exemple**

Tracer la surface représentative de  $f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Maximum local en  $(0, 0)$ . Minimum locaux sur le cercle unité.

**III.1.3 Définition**

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs réelles et  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Un point  $a$  **intérieur** à  $A$  est appelé **point critique** de  $f$  ssi  $\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = 0$  (toutes les dérivées partielles s'annulent simultanément)

**III.1.4 Exemple**

1. Cas des fonctions numériques :  $f : x \mapsto x^3$ .
2. Soient  $a, b > 0$ . Trouver les points critiques de  $f : x \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

**III.1.5 Proposition**

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs réelles et  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Soit  $a \in A$ .

Si  $f$  possède un extremum local en  $a$  alors on est dans l'un des deux cas :

- $a$  est sur la frontière de  $A$
- $a$  est intérieur à  $A$  et alors  $a$  est un point critique de  $f$ .

**Preuve.**

Notons  $a = (x_0, y_0)$ . On considère l'application partielle  $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ .

Si  $a$  est à l'intérieur de  $A$ , alors  $f_{y_0}$  est dérivable sur un intervalle ouvert et admet un extremum en  $x_0$  qui n'est pas une borne. Donc sa dérivée s'annule en  $x_0$  ie  $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ .

On raisonne de même pour chaque dérivée partielle. ■

**III.1.6 Exemple**

$A = \overline{B}(O, 1)$  et  $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$ .

### III.2 Matrice hessienne

#### III.2.1 Théorème (Taylor-Young, ordre 2)

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  où  $U$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $(x_0, y_0) \in U$  et  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$ .

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left( h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) + o_0(h^2 + k^2)$$

Il faut comprendre ce  $o_0$  comme représentant une limite quand  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

**Preuve.**

Admis ■

#### III.2.2 Définition

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  où  $U$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $(x_0, y_0) \in U$  fixé. La **matrice hessienne** de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

#### Réécriture de la formule de Taylor

On se place dans le même cadre que le théorème, on note  $X = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$  et  $H$  la matrice hessienne de  $f$  en  $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ .

On a alors

$$f(X_0 + X) = f(X_0) + (X | \overrightarrow{\text{grad}} f(X_0)) + \frac{1}{2} {}^t X H X + o_0(\|X\|^2)$$

### III.3 Etude des extrema

#### Cas d'un point critique

On se place dans le cadre où  $f$  possède un point critique en  $X_0$  fixé.

On a alors  $\overrightarrow{\text{grad}} f(X_0) = 0$ . Ainsi  $f(X_0 + X) - f(X_0) = \frac{1}{2} {}^t X H X + o_0(\|X\|^2)$  et  $f(X_0 + X) - f(X_0)$  est du signe de  $\frac{1}{2} {}^t X H X$  quand  $X$  est au voisinage de 0.

Réduisons la matrice  $H$  (qui dépend de  $X_0 \dots$ ) : il existe  $P \in O_2(\mathbb{R})$  et  $D = \text{diag}(\lambda, \mu)$  telles que  $H = P D P^{-1}$ .

Alors pour  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  ${}^t X H X = (P^{-1} X) D P^{-1} X = {}^t X' D X' = \lambda h'^2 + \mu k'^2$ .

Ainsi  $f(X_0 + X) - f(X_0)$  est du signe de  $\lambda h'^2 + \mu k'^2$  pour  $h, k$  (ou  $h', k'$ ) "proche" de 0.

**Cas  $\lambda, \mu > 0$**  :  $f$  atteint un minimum local en  $X_0$ .

**Cas  $\lambda, \mu < 0$**  :  $f$  atteint un maximum local en  $X_0$ .

**Cas  $\lambda, \mu$  de signes stricts opposés** :  $f$  n'a ni maximum local ni minimum local en  $X_0$ . On a un **point selle** ou **point col** en  $X_0$ .

**Cas  $\lambda\mu = 0$**  : on ne peut pas conclure a priori. Il faut calculer les deux valeurs propres.

Remarquons que  $\det(H) = \lambda\mu$  et  $\text{tr}(H) = \lambda + \mu$ . Ainsi on pourra distinguer les 4 cas précédents sans connaître  $\lambda$  ni  $\mu$ .

#### III.3.1 Théorème

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  où  $U$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $X_0 \in U$  un point critique de  $f$ .

Notons également  $H$  la matrice hessienne de  $f$  au point  $X_0$ .

1. Si  $\det(H) > 0$  alors  $f$  possède un extremum local en  $X_0$ .
  - (a) si  $\text{tr}(H) > 0$ , il s'agit d'un minimum.
  - (b) si  $\text{tr}(H) < 0$ , il s'agit d'un maximum.
2. Si  $\det(H) < 0$ , alors  $f$  n'a ni minimum local ni maximum local en  $X_0$  (point col).
3. Si  $\det(H) = 0$ , on ne peut pas conclure a priori, il faut faire l'étude autrement.

**III.3.2 Exemple**

Considérons  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x^4 + y^4 - (x - y)^2 \end{cases}$ . Trouvons les éventuels extrema.

Tout d'abord,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$  en tant que fonction polynomiale.

— Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 2(x - y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 2(x - y)$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = 0 &\iff \begin{cases} 4x^3 - 2(x - y) = 0 \\ 4y^3 + 2(x - y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 2(x - y) = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ y = -x \end{cases} \iff x(x^2 - 1) = 0 \text{ et } y = -x \end{aligned}$$

On a trois solutions :  $A = (0, 0)$ ,  $B = (-1, 1)$ ,  $C = (1, -1)$ .

— Calculons maintenant la hessienne au point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

En  $A$ ,  $H(A)$  est de rang 1. On ne peut pas conclure a priori. Or  $f(0, 0) = 0$ . De plus,  $f(x, x) = 2x^4 > 0$  pour  $x \neq 0$ ,  $f(x, -x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2) < 0$  pour  $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ . Il n'y a donc pas d'extremum.

En  $B$  et  $C$ ,  $H = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ .  $\det(H) = 96 > 0$  et  $\text{tr}(H) = 20$  donc  $f$  possède un minimum local en ces deux points, qui vaut  $f(B) = f(C) = -2$ .

**III.3.3 Exemple**

Etudier les extrema de  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto y(x^2 + (\ln(y))^2) \end{cases}$

$f$  est  $\mathcal{C}^2$  sur son ensemble de définition par produits et somme. De plus, pour  $x \in \mathbb{R}, y > 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + (\ln(y))^2 + y \times 2\frac{1}{y} \ln(y) = x^2 + \ln(y)(\ln(y) + 2)$ .

Les points critiques de  $f$  sont  $(0, 1)$  et  $(0, e^{-2})$ .

En  $(0, 1)$ ,  $f(0, 1) = 0$  qui est clairement un minimum global. En  $(0, e^{-2})$ ,  $f(0, e^{-2}) = 4e^{-2}$ .

Calculons la matrice hessienne.  $H(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2\frac{\ln(y)}{y} + \frac{2}{y} \end{pmatrix}$  En  $(0, e^{-2})$  on obtient  $\begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^2 \end{pmatrix}$  de déterminant  $-4 < 0$ .  $f$  n'a ni minimum local ni maximum local en ce point.