Table des matières

Chapitre 1

Croissances comparées

Définition 1

Soit I un intervalle, $a \in \overline{I}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ (a est dans I ou est une borne de I, éventuellement infinie)

1. On dit que $f \underset{a}{\sim} g$ ssi $\frac{f}{g} \underset{a}{\to} 1$ et $\frac{g}{f} \underset{a}{\to} 1$. (f et g sont équivalentes)

   Cette définition n'a du sens que lorsque le calcul de ces limites en a un.

2. On dit que $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f = o_a(g)$ ssi $\frac{f}{g} \underset{a}{\to} 0$. (f est négligeable devant g)

En particulier les fonctions f et g ne peuvent pas être la fonction nulle

Définition 2

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ deux suites avec (v_n) qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) ssi la suite $(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

On note alors $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ (grand o).

Chapitre 2

Séries numériques

Définition 3
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ la **suite** (S_N) définie par

$$\forall N \in \mathbb{N} \ S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

   On dit que S_N (le nombre) est la Nième somme partielle de cette série.
   Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé n_0 (ce qui revient à poser $u_n = 0$ pour $n \in [\![0, n_0 - 1]\!]$). Dans ce cas la série est notée $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$.

2. On dit que la série $\sum u_n$ converge ssi la suite des somme partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge. Sa **nature** est d'être convergente ou divergente.
   Quand elle existe, on note $S = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.

3. Dans le cas d'une série convergente, la suite des restes de la série est la suite définie par $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - S_N$

Définition 4
Soit $\sum u_n$ une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi $\sum\limits_{n \geqslant 0} |u_n|$ converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

Chapitre 3

Rappels de géométrie

Chapitre 4

Matrices carrées

Définition 5
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n = BA.$$

Dans ce cas on note $B = A^{-1}$ et pas $\frac{1}{A}$. En particulier on ne notera pas de quotients de matrices, mais des produits par l'inverse.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n inversibles. Ce n'est pas un espace vectoriel !

Définition 6
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs. Pour $i, j \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ on note a_{ij} la ième coordonnée de u_j.

Alors la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelé matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ et est noté $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$.

C'est la matrice des colonnes des coordonnées des x_j.

Définition 7
1. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie de dimension respectives p et n. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F. Soit également $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice de f dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ (noté $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$) est la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

   C'est la matrice des coordonnées des $f(e_j)$ dans $u_1, \dots, u_n$, écrites en colonnes.
2. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Définition 8
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

On exprime la **nouvelle base** $\mathcal{B}'$ en fonction de l'**ancienne base**

Définition 9
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

A et B représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Définition 10
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle la trace de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ le **nombre** $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$ qui est la somme de ses coefficients diagonaux.

Définition 11
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs. Soit $\mathcal{B}$ une base. On appelle déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n))$.

Définition 12
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Toutes les matrices de f (ie dans n'importe quelle base) ont le même déterminant, on le note $\det(f)$ et on l'appelle déterminant de f.

Chapitre 5

Séries entières

Définition 13

— Une série entière de variable $z \in \mathbb{K}$ est une série de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{C}$.

— Les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelés les coefficients de la série entière.

— Pour chaque $z \in \mathbb{K}$ on étudie la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$. L'ensemble des $z \in \mathbb{K}$ pour lesquels la série entière converge est appelé domaine de convergence.

— La somme de cette série entière est la **fonction** $f : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ définie sur le domaine de convergence.

Définition 14

On considère deux séries entières $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$.

1. La série somme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ est la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$.
2. Le produit de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ par le scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n z^n$.
3. La série produit est la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N} \; c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Définition 15

Soit $R \in \mathbb{R}^+$. On appelle disque ouvert de centre O et de rayon R l'ensemble $D_R = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < R\}$.

Définition 16

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I tel que $0 \in I$ et 0 n'est pas une borne de I. Le **développement de Taylor** de f est la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Définition 17

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ où I est intervalle qui contient 0 (et 0 n'est pas une borne de I). On dit que f est **développable en série entière** (au voisinage de 0) ssi il existe $r > 0$ et une série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ tels que :

— $]-r, r[\subset I$

— $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est de rayon $R \geqslant r$

— $\forall x \in]-r, r[\; f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Autrement dit, f est la somme d'une série entière sur un intervalle $]-r, r[\neq \emptyset$ contenu dans I.

La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est appelée **développement en série entière** de f.

Chapitre 6

Compléments sur les espaces vectoriels

Définition 18
Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque et X un ensemble (quelconque lui aussi). Soit $(u_i)_{i\in X}$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est dite libre ssi pour tout $I \subset X$ ensemble **fini**, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre.

D'une manière équivalente, aucun des u_i n'est une combinaison linéaire (finie, évidemment...) des autres u_j.

Définition 19
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X un ensemble et $(e_i)_{i\in X}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(e_i)_{i\in X}$ est génératrice de E ssi pour tout $u \in E$ on peut trouver un ensemble **fini** $I \subset X$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires tels que $u = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i$.

Ainsi tout élément de E est une combinaison linéaire (la somme est finie) d'éléments de $(e_i)_{i\in X}$ et on a $E = \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in X})$.

Définition 20
Soit X un ensemble et E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in X}$ est une base de E ssi $(e_i)_{i\in X}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Dans ce cas, pour tout $u \in E$ il existe un unique ensemble fini $I \subset X$ et une unique famille de scalaires $(x_i)_{i\in I}$ (appelée coordonnées de u dans $\mathcal{B}$) tels que $u = \sum\limits_{i\in I} x_i e_i$.

Définition 21
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On dit que E est de dimension finie ssi E possède une famille génératrice finie $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ c'est à dire que chaque élément de $x \in E$ peut s'écrire sous la forme $x = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$ où les λ_k sont des scalaires.
2. Dans le cas où E est de dimension finie, E possède au moins une base et toutes les bases de E ont le même cardinal que l'on appelle la **dimension** de E et que l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou plus simplement $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathbb{K}$

Définition 22
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. La somme de F et G est $F+G = \{x_F + x_G |\ x_F \in F \text{ et } x_G \in G\}$. C'est un espace vectoriel et on a même $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

Définition 23
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. On dit que F et G sont supplémentaires dans E et on note $E = F \oplus G$ ssi

$$\forall x \in E\ \exists!\ (x_F, x_G) \in F \times G\ x = x_F + x_G$$

Avec ces notations, x_F est appelé le projeté de x sur F dans la direction G (ou parallèlement à G) et x_G le projeté de x sur G dans la direction F.

Définition 24
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1 \dots F_p$ des sous espaces de E.

1. La somme des espaces $(F_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i = \{u_1 + \dots + u_p |\ u_1 \in F_1 \text{ et } u_2 \in F_2 \text{ et } \dots \text{ et } u_p \in F_p\}$. C'est le sous espace de E engendré par les F_i
2. On dit que la somme $F = \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est **directe** et on note $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$ ssi tout vecteur $u \in F$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $u = u_1 + \dots + u_p$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!] u_i \in F_i$.

La somme et la somme directe sont associatives, ce qui permet de justifier a posteriori l'utilisation de $\sum$ et $\bigoplus$

Définition 25
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est linéaire ssi

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall x, y \in E \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

On a alors $f(0_E) = 0_F$.

Si $F = \mathbb{K}$ on dit que f est une **forme linéaire**. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 26
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Son noyau est $\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E | \ f(x) = 0_F\}$ et son image est $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F | \ \exists x \in E \ y = f(x)\}$.

Définition 27
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. On dit que F est stable par f ssi $f(F) \subset F$.

Définition 28
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace H de E est appelé hyperplan ssi H admet une droite comme supplémentaire. Cette définition est valable même en dimension infinie.

Définition 29
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. **L'homothétie** de rapport λ est l'application linéaire $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array} \right.$.

Définition 30
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

L'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array} \right.$ est appelé projecteur sur F parallèlement à G (ou de direction G).

L'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$ est appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G).

Définition 31
Soient $F_1, \dots F_p$ des sous-espaces de E vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Pour $x \in E$, on pose $x = x_1 + \cdots + x_p$ l'unique décomposition en somme telle que $\forall i \in [\![1, p]\!] x_i \in F_i$.

Le projeté du vecteur x sur F_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} F_i$ est le vecteur x_j. Le projecteur associé est $p_j : x \mapsto x_j$.

Chapitre 7

Intégrations sur un intervalle quelconque

Définition 32
Soient $a < \boxed{\text{b } \leqslant +\infty}$ et $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$.

Si $\lim\limits_{x \to b} \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

Définition 33
Soient $\boxed{\text{-}\infty \leqslant \text{a}} < b$ et $f \in \mathcal{C}(]a, b], \mathbb{R})$.

Si $\lim\limits_{x \to a} \int\limits_x^b f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

Définition 34
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On dit que f est **intégrable** sur I ssi $\int\limits_I |f|$ converge.

Chapitre 8

Réduction

Définition 35
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de f ssi il existe un $x \in E$ **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$. Un tel x **non nul** est appelé un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le spectre de f et noté $Sp(f)$.

Définition 36
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de E. L'espace propre associée à λ est l'espace $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f) \neq \{0_E\}$.

Il s'agit de l'ensemble composé du vecteur nul et de tous les vecteurs propres associés à λ. On le note parfois aussi E_λ.

Définition 37
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les valeurs propres et vecteurs propres de A sont les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire canoniquement associée à A, $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$.

On note $Sp(A) = Sp(f_A)$ et les espaces propres sont notés $E_\lambda(A)$.

Définition 38
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique χ_f de f est le polynôme associé à l'application $x \mapsto \det(xf - Id_E)$. C'est un polynôme unitaire de degré n.

Si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E alors $\chi_f = \chi_A$.

Définition 39
1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable ssi son application linéaire canoniquement associée est diagonalisable ssi A est semblable à une matrice diagonale.

Chapitre 9

Intégrales à paramètres

Chapitre 10

Courbes paramétrées

Définition 40
Si $X, Y \in \mathbb{R}^n$, sont de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, alors le produit scalaire (canonique) de X et Y (noté $< X, Y >$ ou $(X|Y)$) est

$$< X, Y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

La norme de X est donnée par $\|X\| = \sqrt{< X, X >} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ et la distance de X à Y est $\|X - Y\|$. On note cette dernière $d(X, Y)$.

Définition 41
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet b comme limite en a (notations habituelles) ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall t \in I \ |t - a| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(t) - b\| \leqslant \varepsilon$$

Dans le cas où b existe, elle est unique et vaut $f(a)$. On dit alors que f est continue en a.
f est dite continue sur I si elle est continue en tout point a de I.

Définition 42
Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{array} \right.$. Le **support** de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble des points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M) .

Définition 43
Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

Définition 44
Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. On dit que f possède une demi tangente à gauche (resp. à droite) en t_0 ssi $\lim\limits_{t\to a^-} \frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|}$ existe (resp. limite à droite). Notons $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ ces limites quand elles existent.

La demi-tangente à gauche de f en a est alors $f(a) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_-)$ et la demi-tangente à droite est $f(a) + \mathbb{R}\vec{u}_+$. Si ces droites sont confondues ($\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ sont colinéaires) alors la droite obtenue est la tangente à f en a.

Définition 45
Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \bar{I}$. On dit que f possède une branche infinie au voisinage de a si $\lim\limits_{t\to a} x(t)$ et $\lim\limits_{t\to a} y(t)$ existent et qu'on est dans un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote horizontale ou verticale.
2. Ces deux limites sont infinies.
   (a) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Ox).
   (b) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Oy).
   (c) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ il y a deux cas
      i. si $\lim\limits_{t\to a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f.
      ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente α.

Chapitre 11

Espaces euclidiens

Définition 46
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un produit scalaire sur E est une application $\left\{\begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x|y) \end{array}\right.$ qui a les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall u, v, w \in E\ (\lambda u + \mu v|w) = \lambda(u|w) + \mu(v|w)$ et $(u|\lambda v + \mu w) = \lambda(u|v) + \mu(u|w)$.
2. Symétrique : $\forall u, v \in E\ (u|v) = (v|u)$.
3. Positive : $(u|u) \geqslant 0$.
4. Définie : $(u|u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Notation. Un produit scalaire est aussi parfois noté $\langle u, v\rangle,$ ou $u \cdot v$.

Définition 47
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel munit d'un produit scalaire. On dit alors que E est un espace préhilbertien réel, et si E est de dimension finie on dit que E est un espace euclidien.

Définition 48
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (ie. E est un espace préhilbertien).

1. On appelle norme (euclidienne) d'un vecteur $u \in E$ le réel positif $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$.
2. On appelle distance (euclidienne) entre deux vecteurs $u, v \in E$ le réel positif $d(u,v) = \|v - u\| = \|u - v\|$.

Définition 49
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soient $u, v, u_1, \ldots, u_n \in E$

1. On dit que u est unitaire, ou normé ssi $\|u\| = 1$.
2. u et v sont dits orthogonaux ssi $(u|v) = 0$. On note $u \perp v$.
3. $(u_1, \ldots, u_n)$ est dite orthogonale ssi les u_i sont orthogonaux deux à deux.
4. $(u_1, \ldots, u_n)$ est dite orthonormale ssi elle est orthogonale et tous les u_i sont unitaires. Autrement dit $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\ (u_i|u_j) = \delta_{i,j}$.

Définition 50
Deux sous-espaces F, G de E sont dits orthogonaux ssi $\forall (x_F, x_G) \in F \times G\ (x_F|x_G) = 0$.

On dit que $x \in E$ est orthogonal à F ssi $\forall x_F \in F\ (x|x_F) = 0$

Définition 51
Soit F un sev de E. L'orthogonal de F est $F^\perp = \{x \in E|\ \forall x_F \in F\ (x_F|x) = 0\}$. $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F.

Définition 52
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E .

1. La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à (de direction) $F^\perp$.
2. La symétrie orthogonale sur F est la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$.

Définition 53
Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est appelée retournement, et une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelé réflexion.

Définition 54
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est orthogonale ssi l'endomorphisme canoniquement associé à M est orthogonal. On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonale de taille n

Définition 55

1. L'ensemble des isométries de E de déterminant 1 est noté $SO(E)$ et appelé groupe spécial orthogonal de E. $f \in SO(E)$ est dite positive (et si $\det(f) = -1$, on dira que f est une isométrie négative)
2. $SO_n(\mathbb{R})$ (aussi noté $SO(n)$) est l'ensemble $\{M \in O(n) |\ \det(M) = 1\}$.

Définition 56
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que cette base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif (c'est à dire vaut 1 dans le cas d'une base orthonormée).

On dit qu'elle est indirecte sinon.

Définition 57
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi ${}^tA = A$. L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Chapitre 12

Probabilités

Définition 58
Soit E. On dit que E est dénombrable ssi il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to E$ bijective. En d'autre termes, on peut écrire $E = \{x_0, x_1, \ldots\}$ sans oublier un seul élément.

Définition 59
Soit Ω un ensemble que l'on appellera univers. Une **tribu** sur Ω est un sous ensemble T de $\mathcal{P}(\Omega)$ (les éléments de T sont des sous ensembles de Ω) qui vérifie les 3 conditions :

1. $\Omega \in T$
2. $\forall A \in T\ A^C = \overline{A} = \Omega \backslash A \in T$.
3. Si $(A_n) \in T^{\mathbb{N}}$ alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.

Les éléments de T (qui sont des ensembles, rappelons le) sont des **événements**. Le couple (Ω, T) est un **espace probabilisable**.

Définition 60
Soit Ω un ensemble et T une tribu sur Ω. Une **probabilité** sur Ω est une fonction $\mathbb{P}$ qui associe à chaque événement A une probabilité $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ avec les contraintes suivantes :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements incompatibles deux à deux (ie disjoints deux à deux), alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \text{ propriété de } \sigma\text{-additivité}$$

En particulier, toute série de la forme précédente doit converger vers un nombre dans $[0, 1]$.

Le triplet $(\Omega, T, \mathbb{P})$ est appelé un **espace probabilisé**. Dans la suite du cours, nous utiliserons ces notations.

Définition 61
Avec les notations précédentes :

on dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements ssi $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (disjoints 2 à 2) et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$.

Définition 62
Soit A un événement.

1. Si $A \neq \emptyset$ et $\mathbb{P}(A) = 0$ on dit que A est **négligeable**.
2. Si $A \neq \Omega$ et $\mathbb{P}(A) = 1$ on dit que A est presque sûr.

Définition 63
Soient A, B deux événements. On dit que A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Définition 64
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants ssi

$$\forall I \subset [\![1, n]\!] \mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Définition 65

1. Une variable aléatoire **discrète** est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ où $X(\Omega)$ (l'ensemble des valeurs de X) est dénombrable ou fini.
2. Si A est un ensemble de valeurs de X, on note $(X \in A)$ l'événement "X prend l'une des valeurs dans A", c'est à dire l'ensemble $X^{-1}(A)$.
3. Si x est l'une des valeurs que peut prendre X (ie. $x \in X(\Omega)$), on note $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$, c'est à dire "X prend la valeur x"

Définition 66
Soit X une variable aléatoire discrète. La loi de X est l'application

$$\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array} \right.$$

Avec les notations du théorème précédent, il s'agit de donner, $\mathbb{P}(X = x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 67
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ (on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) ssi $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$.

En particulier, l'ensemble des valeurs de X est $\mathbb{N}\backslash\{0\}$

Définition 68
Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit la loi de Poisson de paramètre λ (noté $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$) ssi $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Définition 69
Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω. On note $\{x_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{y_m |\ m \in \mathbb{N}\}$ les valeurs possibles de X et Y respectivement.

1. La **loi conjointe** du couple (X, Y) est la loi décrite par la donnée de $\mathbb{P}(X = x_n, Y = y_m)$ pour toutes les valeurs de n et m.
2. Les lois marginales de la loi conjointe de (X, Y) sont les lois de X et Y.
3. Pour $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathbb{P}(X = x_{n_0}) \neq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_{n_0})$ est la loi donnée par $\mathbb{P}(Y = y_m | X = x_{n_0})$

Définition 70
Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω. on dit qu'elles sont indépendantes ssi $\forall x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ ie ssi les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont deux à deux indépendants pour toutes les valeurs possibles de x et y.

Définition 71
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n variables aléatoires discrètes sur Ω. On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes ssi pour $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$, $\forall x_1 \in X_{i_1}(\Omega), \dots, x_k \in X_{i_k}(\Omega) \mathbb{P}(X_{i_1} = x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_{i_k} = x_k) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_{i_j} = x_i)$.

Autrement dit, on peut calculer toute probabilité d'intersection finie par produit.

Définition 72
Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle fonction de répartition de X et on note F_X la fonction

$$F_X : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array} \right.$$

Définition 73
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice (ou série génératrice) de X est la fonction

$$G_X : t \mapsto E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

G_X est définie au moins sur le segment $[-1,1]$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et $G_X(1) = 1$.

Définition 74
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_n |\ n \in \mathbb{N}\}$. On dit que X est d'espérance finie ssi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n\mathbb{P}(X = x_n)$ converge **absolument**.

Dans ce cas, on appelle **espérance de** X et on note $E(X)$ le réel $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X = X_n)$.

Définition 75
Soient X, Y deux variables aléatoires de variance finie et non nulle. Le coefficient de corrélation de X et Y est

$$\mathrm{cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1,1]$$

Chapitre 13

Equations différentielles linéaires

Définition 76
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{E}$$

avec a, b des fonctions définies sur un intervalle I. L'équation homogène associée à E est

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{E_H}$$

On appelle solution de E toute **fonction** dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. Les courbes représentatives des fonctions solutions sont appelées *courbes intégrales* de l'équation.

Le problème consistant trouver une solution de E vérifiant en plus une condition du type $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$ et $y_o \in \mathbb{K}$) est appelé un problème de Cauchy . On parle de condition initiale.

Définition 77
On considère l'équation (E_H) sur $\mathbb{R}$: $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$.

L'équation caractéristique associée est $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Définition 78
Soit $Y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}^n)$ une fonction à valeurs vectorielles. On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Soient également $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Le système d'équations différentielles $Y' = AY + B$ est appelé un système différentiel linéaire à n équations et n inconnues, à coefficients constants.
2. Le système homogène associé est $Y' = AY$. Il est défini sur $\mathbb{R}$ a priori.
3. Résoudre un tel système, c'est trouver toutes les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ le vérifiant.
4. Soit $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{K}^n$. On appelle problème de Cauchy (en (t_0, Y_0)) le système $\begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$

Chapitre 14

Géométrie dans le plan et l'espace

Définition 79
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Définition 80
Si f est la rotation d'angle θ autour de l'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ orienté par le vecteur unitaire u, alors dans toute base orthonormée de la forme $\mathcal{B} = (u, v, w)$ (le premier vecteur doit être u) on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

L'interprétation géométrique est la suivante : $\mathrm{Vect}(u)$ est la droite des points fixes, et dans $P = \mathrm{Vect}(v, w) = \mathrm{Vect}(u)^\perp$, f est la rotation d'angle θ.

On dit que l'axe de f est orienté par u, car l'angle de rotation dans l'espace dépend de la direction selon laquelle on observe le plan P. Le sens de u donne le "dessus" de P et donc le côté par lequel on observe P pour que l'angle soit bien θ. On on change le sens de u (qui devient donc $-u$), alors l'angle de la même rotation devient $-\theta$.

Définition 81
Une conique de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points $M : (x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ et $d, e, f \in \mathbb{R}$.

Définition 82
Soient $a, b, p > 0$. On appelle équation réduite de conique les équations suivantes :
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)
- $y^2 = 2px$ (parabole)

Chapitre 15

Courbes et surfaces

Définition 83
Une courbe paramétrée de l'espace est une fonction $f : t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ définie sur un intervalle I non trivial.

Son **support** Γ est l'ensemble $\{M(t) | t \in I\} = f(I)$. C'est l'ensemble que l'on cherche à tracer ou étudier.

Si Γ est inclus dans un plan, on dira que f (ou abusivement Γ) est une courbe plane, sinon on dit que f est une courbe gauche.

Définition 84
On appelle nappe paramétrée ou surface paramétrée une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$) définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Une telle fonction f sera notée $f : (u,v) \mapsto M(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$.

Le support d'une surface paramétrée est l'ensemble $S = \{M(u,v) |\ (u,v) \in U\} = f(U)$.

Définition 85
Soit $f : (u,v) \mapsto M(u,v)$ une surface paramétrée de support S. Une courbe **tracée sur** S est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans S.

Définir une telle courbe revient à donner deux fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ (I un intervalle) telles que $\forall t \in I\ (u(t), v(t)) \in U$. On obtient alors une courbe $\gamma : t \mapsto M(u(t), v(t))$. Son support Γ est inclus dans S.

Définition 86
Soit $f : (u,v) \mapsto M(u,v)$ une surface paramétrée définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. On note S son support. Soit $(u_0, v_0) \in U$ et $M_0 = M(u_0, v_0)$.

1. On dit dit M_0 est un point **regulier** de S (ou de f) ssi $\left(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ est libre c'est à dire ssi $\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0) \neq \vec{0}$.
   Sinon on dit que M_0 est critique ou singulier.
2. Si M_0 est régulier, on appelle plan tangent à S en M_0 le plan
$$M_0 + \mathrm{Vect}(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0)).$$

Définition 87
En un point régulier M_0, la droite passant par M_0 et normale au plan tangente est appelée normale à la surface en M_0.

Définition 88
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On appelle surface (implicite) d'équation $f(x,y,z) = 0$ l'ensemble $\Sigma = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\ f(x,y,z) = 0\}$ (l'ensemble des solutions de l'équation).

Un point $M \in \Sigma$ est dit **régulier** ssi $\overrightarrow{grad} f(M) \neq \vec{0}$ et singulier sinon.

Définition 89
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

On appelle courbe d'équation cartésienne $\Gamma : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ l'intersection des des surfaces ainsi définies (cette intersection peut être une surface, un ou des points, vide...).

Un point $M \in \Gamma$ est dit régulier si et seulement si $\overrightarrow{grad} f(M) \wedge \overrightarrow{grad} g(M) \neq \vec{0}$

Définition 90
Une surface S est dite **réglée** ssi elle peut être écrite comme la réunion d'une famille de droites.

Plus précisément, S est réglée ssi il existe une surface paramétrée dont le support est S de la forme $M(k,t) = A(t) + ku(t)$ où A, u sont de classe $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^3)$ et u ne s'annule pas. M est alors définie sur $I \times \mathbb{R}$.

Pour un t fixé, la droite $\mathcal{D}_t = A(t) + \mathrm{Vect}(u(t))$ est une **génératrice** de S et on a $S = \bigcup\limits_{t \in I} \mathcal{D}_t$

Définition 91

1. Un **cône** est une surface engendrée par toutes les droites passant par un point fixe Ω et un point d'une courbe Γ.
2. Un **cylindre** est une surface engendrée par toute les droites dirigée par $\vec{u}$ fixé et passant par un point d'une courbe Γ.

Définition 92
On appelle surface de révolution la surface S obtenue par rotation d'une courbe Γ par rotation autour d'une droite Δ.

— Δ est l'axe de S.
— Les intersections de S avec les plans orthogonaux à Δ sont soit vide soit des cercles d'axe Δ que l'on appelle parallèles de S.
— Un plan méridien de S est un plan qui contient Δ.
— Une méridienne de S est l'intersection de S avec un demi-plan, méridien délimité par Δ.

Chapitre 16

Courbes paramétrées

Définition 93
Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{array} \right.$. Le **support** de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble des points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M) .

Définition 94
Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

Définition 95
Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \bar{I}$. On dit que f possède une branche infinie au voisinage de a si x et y admettent une limite en a et qu'on est dans un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote horizontale (seulement $y(t)$ tend vers l'infini) ou verticale (seulement $x(t)$ tend vers l'infini).
2. ces deux limites sont infinies.
   (a) Si $\lim\limits_{t \to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Ox).
   (b) Si $\lim\limits_{t \to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Oy).
   (c) Si $\lim\limits_{t \to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ il y a deux cas
      i. si $\lim\limits_{t \to a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f.
      ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente m.

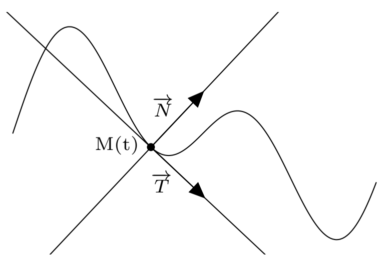
Définition 96
Soient $a, b \in I$. On appelle longueur (algébrique) de $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ entre les points a et b le réel $\int_a^b \|f'(t)\| \mathrm{d}t$.

Définition 97
Soit $t_0 \in I$.

On appelle abscisse curviligne de f d'origine t_0 la fonction $s : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \int_{t_0}^t \|f'(u)\| \mathrm{d}u \end{array} \right.$.

Définition 98
Soit $t \in I$. On note $\overrightarrow{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ (vecteur unitaire tangent de f en t) et $\overrightarrow{N}(t)$ (vecteur unitaire normal de f en t) le vecteur unitaire directement orthogonal à $\overrightarrow{T}(t)$.

Le repère $(f(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ est appelé repère de Frenet de f en t.



Définition 99
On appelle courbure la dérivée de la fonction α par rapport à s :

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$$

Comme α est un angle, il n'a pas d'unité. γ s'exprime donc en m^{-1}.

Définition 100
Un point d'une courbe paramétrée est dit birégulier ssi les vecteurs vitesse et accélération en ce point ne sont pas colinéaires. On a donc (avec les notations classiques) les entiers p et q qui valent $p = 1$ et $q = 2$.

Définition 101
Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière (tous les points sont biréguliers). Le rayon de courbure au point t est $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$ et le centre de courbure est le point $C(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$ ie $\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{N}$.

On peut évidemment repérer M par son abscisse curviligne et exprimer toutes les quantités en fonction de s.

Définition 102
Le lieu des centres de courbure d'une courbe s'appelle la courbe développée. C'est la courbe $t \mapsto C(t)$.

Définition 103
Soit $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ une famille de droite. On dit que $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ admet la courbe $f : t \mapsto M(t)$ comme enveloppe ssi pour tout $t \in I$ on a

1. $M(t) \in \mathcal{D}_t$
2. $\mathcal{D}_t$ est tangente à f en $M(t)$.

Chapitre 17

Fonctions de plusieurs variables

Définition 104
Soit $r \in [0, +\infty[$ et $X_0 \in \mathbb{R}^p$

1. La boule ouverte de rayon r et de centre X_0 est $B(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p | \ \|X_0 - X\| < r\}$.
2. La boule fermée de rayon r et de centre X_0 est $\overline{B}(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p | \ \|X_0 - X\| \leqslant r\}$.

Définition 105
Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$.

1. On dit que A est une partie **ouverte** de $\mathbb{R}^p$ (on dit aussi que A est un ouvert) ssi
$$\forall X_0 \in A \exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset A$$
2. On dit que A est une partie **fermée** de $\mathbb{R}^p$ ssi $\overline{A}$ (son complémentaire) est une partie ouverte.

Définition 106
Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $X_0 \in \mathbb{R}^p$.

1. On dit que X_0 est un point intérieur à A ssi $\exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset A$. En particulier $X_0 \in A$.
2. On dit que X_0 est un point extérieur à A ssi $\exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset \mathbb{R}^p \backslash A$. En particulier $X_0 \notin A$ et X_0 est un point du complémentaire de A.
3. On dit que X_0 est un point adhérent à A ssi $\forall r > 0 \ B(X_0, r) \cap A \neq \emptyset$. Cette fois on a pas forcément $X_0 \in A$. Par contre X_0 n'est pas extérieur à A.
4. On dit que X_0 est un point frontière de A ssi X_0 est à la fois adhérent et pas intérieur à A, ou encore pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(X_0, r)$ a un intersection non vide avec l'intérieur et l'extérieur de A.

Définition 107
Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $f : A \to \mathbb{R}^n$. Soit $\ell \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit a un point adhérent à A. On dit que f admet ℓ comme limite en a ssi
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \ \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$$
Il faut comprendre $\|x - a\|$ comme la norme dans $\mathbb{R}^p$ et $\|f(x) - \ell\|$ comme la norme dans $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a ssi
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \ \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon$$
f est **continue** sur A ssi f est continue en tout point de A.

Définition 108

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^n \\ (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) \end{array} \right.$ où $U \subset \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_0, y_0, z_0)$ un point **intérieur** à U.

On dit que f possède une dérivée partielle par rapport à x en $a = (x_0, y_0, z_0)$ ssi l'application partielle $x \mapsto (x, y_0, z_0)$ (qui est définie sur un intervalle centré en x car a est intérieur) est dérivable en x_0. Ce nombre dérivé est alors noté $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ou $\partial_1 f(x_0, y_0, z_0)$.

On définit de même $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Définition 109
Soit U un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ssi f possède 3 (ou 2) dérivées partielles sur U et que ces fonctions de 3 (ou 2) variables sont continues.

Définition 110
Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ (remarquez le cas $n = 1$). Si f possède des dérivées partielles en $(x, y, z) \in U$, le gradient de f en (x, y, z) (noté $\overrightarrow{grad}\, f(x, y, z)$) est le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right)$.

En physique, le gradient est parfois noté ∇f

Définition 111
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $A \subset \mathbb{R}^2$. Soit $a_0 = (x_0, y_0) \in A$. On dit que f possède un maximum local (resp. minimum local) ssi il existe un $r > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in A \cap \overline{B}(a_0, r) \ f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

(resp. $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$).

Définition 112
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $A \subset \mathbb{R}^2$. Un point a **intérieur** à A est appelé **point critique** de f ssi $\overrightarrow{grad}\, f(a) = 0$ (toutes les dérivées partielles s'annulent simultanément)

Définition 113
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x_0, y_0) \in U$ fixé. La **matrice hessienne** de f au point (x_0, y_0) est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$