

Géométrie du plan et de l'espace : isométries

Exercice 1

On note r une rotation de \mathbb{R}^3 , d'axe D , distincte de l'identité et s une symétrie orthogonale par rapport à un plan P .

Montrer que si $P = D^\perp$ alors $s \circ r = r \circ s$.

Etudier la réciproque.

Exercice 2

Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ la nature de la courbe plane d'équation $(1+m)(x^2 + y^2) - 2mxy = m$.

Exercice 3

On donne $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $\sigma = ab + bc + ac$, $s = a + b + c$.

1. Montrer que M est orthogonale ssi $\sigma = 0$ et $s \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi $\sigma = 0$ et $s = 1$.
3. (★) Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$

Exercice 4

Etude de la conique d'équation $4x^2 + 12xy - y^2 - 5x - 6y = 0$.

Exercice 5

Soient a, b deux réels non nuls. Dans le plan affine euclidien usuel, rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la droite D d'équation

$$D : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

et un point M de coordonnées $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer les coordonnées (x_1, y_1) du symétrique M_1 de M par rapport à D .
2. Donner de même $M_2(x_2, y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$, respectivement symétriques de M par rapport à (Ox) et (Oy) .
3. Déterminer le lieu des points M pour lesquels M_1, M_2, M_3 sont alignés et donner la nature de cet ensemble.

Exercice 6

$$\text{Soit } A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 12 \\ 4 & -12 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Quelle transformation géométrique r de \mathbb{R}^3 A représente-t-elle?
2. Donner l'image par r du plan P d'équation $x - y + 4z = 1$.

Courbes paramétrées

Exercice 7

Soit $\Gamma : y = ax^2$. Déterminer l'équation de la normale en un point M d'abscisse $t \neq 0$.

Déterminer l'ensemble γ des points où se coupent deux normales à Γ qui soient perpendiculaires.

Déterminer l'enveloppe des normales à Γ .

Exercice 8

Caractériser et tracer la conique $(C) : y^2 - x^2 = 1$.

Donner une paramétrisation $(x(t), y(t))$ de la courbe à l'aide des fonctions ch et sh.

Déterminer une équation de la famille des normales (H) à (C) . Déterminer la développée (γ) de (C) et tracer après étude.

Exercice 9

1. Soit $b \neq 0$. Etude de la courbe paramétrée $(x = \cos(3t), y = b \sin^3(t))$ sur $[-\pi, \pi]$. On montrera que l'on peut réduire l'intervalle d'étude par des symétries à préciser.
2. On choisit $b = 1$. Déterminer les points doubles et un vecteur directeur de la tangente en ces points.
3. Donner un développement limité de x et y en 0. Que peut-on en déduire? Donner l'allure de la courbe au voisinage de l'origine.
4. Dans le cas général, comparer les courbes obtenues pour b et $-b$. Comment déduit-on toutes les courbes du cas $b = 1$?

Exercice 10

Etude de la courbe paramétrée $(x = \cos 3t, y = \sin 3t)$.

Exercice 11

1. Représenter la courbe C paramétrée par $x(t) = 2t^2, y(t) = 2t$.
2. Déterminer une équation de la tangente T_t au point de paramètre t .
3. Trouver les conditions sur t et u pour que T_t et T_u soient perpendiculaires.
4. Déterminer le lieu des points d'intersection des tangentes perpendiculaires (appelé podaire de C).

Exercice 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit un cercle \mathcal{C}_t de rayon a tangent à (Ox) en un point T d'abscisse t . Soit M le point d'intersection du cercle \mathcal{C}_t avec l'autre tangente à \mathcal{C}_t issue de O .

1. Tracer la figure.
2. Déterminer les coordonnées de M .
3. Etudier la trajectoire.

Exercice 13

Dans le plan affine euclidien usuel, rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$D_t : x \sin(t) - x \cos(t) + \sin^3(t) = 0$$

1. Déterminer l'enveloppe Γ de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$.
2. Déterminer et étudier les points stationnaires de Γ .
3. Représenter Γ .

Exercice 14

On considère l'arc paramétré \mathcal{C} défini par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2+9}{t^2+1} \\ y(t) = \frac{t(t^2+9)}{t^2+1} \end{cases}$$

1. Etudier les symétries éventuelles de \mathcal{C} .
2. Etudier les variations de x et y .
3. Déterminer les asymptotes de \mathcal{C} et les tangentes horizontales et verticales.
4. Tracer l'allure de \mathcal{C} .
5. Soit D une droite du plan. Montrer que $D \cap \mathcal{C}$ est fini et que $|D \cap \mathcal{C}| \leq 4$.

Exercice 15

Déterminer l'ensemble des centres de courbures au point O des courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' - 2y = 1$$

telles que $y(0) = 0$.

Surfaces**Exercice 16**

On note $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution de \mathcal{D} autour de (Oz) .

Donner également une représentation paramétrique.

Exercice 17

Montrer que $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ est non bornée.

Trouver les points critiques et préciser leurs natures si possible. Montrer que le point $(0, 0)$ est un point col, c'est à dire qu'il n'est ni minimum ni maximum local.

Calculer $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$.

Exercice 18

Dans l'espace munit d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère

$$C_1 : \begin{cases} z = x^2 - 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad C_2 : \begin{cases} z = x^2 + 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

. Déterminer une équation cartésienne du lieu S des milieux des segments $[M_1M_2]$ où M_1 et M_2 parcourent C_1 et C_2 respectivement.

Exercice 19

On considère la surface d'équation paramétrique $S : \begin{cases} x = u^2 \\ y = uv \\ z = 2u + v \end{cases}$.

1. Montrer que S est une surface réglée.
2. Donner le plan tangent \mathcal{P} au point de paramètre $(1, 1)$.
3. Donner une équation cartésienne de S .
4. Déterminer l'intersection $S \cap \mathcal{P}$.

Exercice 20

On pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $S : x(y+z) = 1$. Vérifier que S est un cylindre de direction $\text{Vect}(\vec{u})$ et donner une section de ce cylindre en précisant sa nature.

Exercice 21

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $S : x(\alpha - y) + y(\alpha - z) + z(\alpha - x) = 0$.

1. Donner deux points de S par leurs coordonnées.
2. Rappeler la définition d'un cône.
3. Montrer que si S est un cône alors $\alpha = 0$.
4. En s'inspirant du cours sur les coniques, effectuer un changement de repère orthonormé direct pour réduire l'équation de S dans le cas $\alpha = 0$.
5. Donner une paramétrisation de $\Sigma : x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ et en déduire que Σ est une surface réglée, puis que Σ est un cône.
6. Conclure sur S .