PTSI : suites, continuité, dérivabilités

Exercice 1
Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \ln(1 + 3x + x^n)$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif a_n tel que $f_n(a_n) = 1$.
2. Montrer que $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ pour tout n.
3. Calculer a_0, a_1, a_2.
4. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
5. Etudier la convergence ainsi que l'éventuelle limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

1. Montrer que $\forall x > 0 \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de $\frac{x}{\arctan(x)} - \frac{2}{\pi}x$.

Séries, séries entières

Exercice 3 (Méthode)
Etudier la convergence des séries de terme général $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et $\frac{n!}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}$.

Exercice 4
Etudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$. On pourra encadrer les sommes partielles par des intégrales.

Exercice 5

1. Montrer que f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1.
2. Déterminer le développement en série entière de f et calculer son rayon de convergence.

Exercice 6
Déterminer le rayon de convergence ainsi que la somme des séries entières suivantes (d'une variable réelle x) ;

1. $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{ch}(n) x^n$
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n \cos(n\alpha)}{n!}$

Exercice 7
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2} \end{cases}$$

On s'intéresse à la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$

1. On note R le rayon de convergence de la série étudiée.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant a_n \leqslant n + 2$.
   (b) En déduire que la suite (a_n) est monotone et déterminer R.
2. Calcule de la somme. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2}$
   (a) Déterminer le domaine de définition de f et g.
   (b) Établir une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ pour les valeurs de x où cela a du sens.
   (c) Montrer que g est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera.
   (d) En déduire une expression de $f(x)$.

Intégrales

Exercice 8

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que l'équation $\int_x^y e^{t^2}\mathrm{d}t = 1$ d'inconnue y possède une unique solution.
2. On définit une application f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = y$ tel que définit à la question précédente. Montrer que f est continue. Est-elle dérivable ?

Exercice 9
Convergence et calcul de $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t + e^{-t}}\mathrm{d}t$.

Exercice 10
Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{1+(na)^2}$.

1. Etudier la convergence. La somme, quand elle existe, est notée $h(a)$.
2. Etudier les variations de h, puis sa limite en $+\infty$.
3. Prouver que

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \frac{1}{1 + ((k+1)a^2)} \leqslant \int\limits_k^{k+1} \frac{1}{1 + (ta)^2} \leqslant \frac{1}{1 + (ka)^2}$$

4. Donner un équivalent de h en 0.

Exercice 11
Soit E l'ensemble des fonctions f, continues sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que $\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

1. Pour $a,b\in\mathbb{R}$, montrer que $|ab|\leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.
2. Montrer que $\varphi : \begin{cases} E\times E & \to \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t \end{cases}$ est définie et constitue un produit scalaire.
3. On définit sur $[0,+\infty[$ les fonctions $L_0(x)=1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^n)$. Montrer que L_n est polynomiale de degré n.
4. Montrer que $L_n\in E$.
5. Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale pour le produit scalaire φ

Exercice 12
Soient $\alpha,\beta>0$ et $f_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+\beta}e^{-xt}\mathrm{d}t$. Montrer que f_α est définie sur $\mathbb{R}_+^+$ (c'est à dire que l'intégrale considérée converge pour tout $x>0$) puis montrer qu'elle y est $\mathcal{C}^1$. On pourra montrer la classe $\mathcal{C}^1$ tout d'abord sur $[a,+\infty[$ où $a>0$ est fixé.

Pour aller plus loin : Donner ses variations et limites aux bornes. Est-elle $\mathcal{C}^\infty$?

Exercice 13
1. Enoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Montrer le caractère $\mathcal{C}^1$ de $f : x\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$
3. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

Exercice 14
1. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t+x}\mathrm{d}t$, pour $x\geqslant 0$?
2. Montrer que la fonction $f : x\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t+x}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour $a>0$ fixé, puis sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner sa dérivée.
3. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
4. Pour aller plus loin : donner une équation différentielle vérifiée par f puis déduire une expression de f, ou encore déterminer un équivalent de $f(x)$ en 0 ou $+\infty$

Équations différentielles, EDP

Exercice 15 (Méthode)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $xy'-y=\frac{x^2}{1+x^2}$.

Exercice 16 (Méthode)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :
1. $y''(t)+2y'(t)-3y(t)=e^{2t}$
2. $y''(t)-16y(t)=0$
3. $y''(t)-4y'(t)+4y(t)=e^{2t}$

Exercice 17
On définit la fonction f par $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.
1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f vérifie l'équation différentielle (E) : $xy''+y'+xy=0$ grâce à une intégration par parties.
3. Appliquer la méthode de variation de la constante sur f pour déterminer une deuxième solution de (E).
4. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$

Exercice 18 (Méthode)

On pose $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.
1. Déterminer toutes les colonnes X de trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $X'=AX$ et $X(0)=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.
2. Quelle courbe est définie par X ?

Plusieurs variables

Exercice 19
Soit $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x+y>0\}$ et soit $g : \begin{cases}\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R} & \to U\\ (t,u) & \mapsto (t+u,t-u)\end{cases}$.
1. Montrer que g réalise une bijection de $V=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ sur U et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $F=f\circ g$. Déterminer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

3. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \frac{2}{x+y}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2}{x+y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{2}{2+x+y} f = (2+x+y)\cos(\frac{x+y}{2})$$

   On suppose que f est une solution de (E) sur U, de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer une équation dont F est solution.

4. Déterminer les solutions de (E) sur U.

Exercice 20 (Méthode)
Déterminer les extrema locaux de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$
2. $f(x,y) = x^3 + y^3$
3. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$

Exercice 21
Notons $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x+y \leqslant 1\}$.

1. Représenter $\mathcal{D}$ et justifier que $\mathcal{D}$ est borné. Pourquoi est-ce un fermé ?
2. On fixe $a, b, c \in]0, +\infty[$ et on considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^a y^b (1-x-y)^c \end{array} \right.$. Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.
3. Déterminer $\sup\limits_{(x,y)\in\mathcal{D}} f$.