DNS 2 : révisions d'analyse

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1

Dans cette exercice on identifie les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales. La partie II est indépendante des autres. On pourra utiliser librement les résultats de la partie I pour traiter la partie III.

Partie I : polynômes de Bernoulli

Dans cette première partie on étudie une suite de polynômes très utiles, ainsi que certaines de leurs propriétés.

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ une fonction continue sur $[0,1]$. On pose $G : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$.

   Préciser le lien entre f et G et montrer qu'il existe une unique fonction $F \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $F' = f$ et $\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = 0$. On exprimera F en fonction de G.
2. On pose $B_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme B_{n+1} par : $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t)\mathrm{d}t = 0$.

   Montrer que la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Expliciter B_1, B_2, B_3 et B_4.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n.
5. Montrer que pour $n \geqslant 2$ on a $B_n(0) = B_n(1)$. Cette relation est-elle valable pour $n = 0$? $n = 1$?
6. On définit une autre suite de polynômes $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ pour tout n. Montrer que (C_n) vérifie les conditions de la question 2 définissant (B_n) et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.
7. Que peut-on en déduire concernant les courbes représentatives des fonctions B_n ?
8. On suppose (dans cette question seulement) que n est impair et $n \geqslant 3$. Calculer $B_n(0), B_n(\frac{1}{2}), B_n(1)$.
9. Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que les polynômes B_{2m+1} ne s'annulent pas sur $]0, \frac{1}{2}[$. On pourra utiliser le théorème de Rolle.
10. En déduire que les polynômes $B_{2m}(X) - B_{2m}(0)$ sont de signes constants sur $[0,1]$.

Partie II : fonction ζ

Le but de cette partie est définir une nouvelle fonction (au centre de nombreuses recherches en mathématiques)

1. Soit f une fonction continue et décroissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$ pour un $a \in \mathbb{R}$. Soit k un entier, $k \geqslant a+1$. Justifier que
$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^k f(t)\mathrm{d}t$$
   Un schéma sera apprécié, mais ne constitue pas une preuve.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ suivant la valeur de α.

   En cas de convergence, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.
3. Montrer que pour $\alpha > 1$, $1 \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$. Qu'en déduire pour $\lim_{\alpha\to+\infty} \zeta(\alpha)$?
4. En reprenant avec soin les calculs de la question 2, trouver un équivalent de $\zeta(\alpha)$ quand $\alpha \to 1$.

Partie III : Calcul de $\zeta(2m)$

1. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1[$. Montrer que

$$1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

2. Soit $n > 0$. On définit sur $]0,1[$ la fonction $\varphi_n : t \mapsto \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}$. Montrer que $\forall t \in]0,1[\ \varphi_n(t) = (-1)^n \varphi_n(1-t)$.
3. Montrer que φ_n est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et que le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
4. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_0^1 f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0$. On pourra utiliser une intégration par parties.
5. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On pose $I_{n,k} = \int\limits_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t$. Calculer $I_{n,0},\ I_{0,k},\ I_{1,k}$.
6. Pour $n \geqslant 2$ et $k > 0$, donner une relation de récurrence liant $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$. En déduire l'expression, pour $p \in \mathbb{N}$ de $I_{2p+1,k}$ et montrer que

$$I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}$$

7. Soit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $N \in \mathbb{N}$. En utilisant la question 1, exprimer en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$ la quantité

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\mathrm{d}t$$

La réponse attendue ne contient pas le symbole $\int$

8. Montrer que $B_{2m}(0) = 2(-1)^{m-1}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k\pi)^{2m}}$ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

Exercice 2

Partie I

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-1}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. On désignera par λ_1 et λ_2 ses racines, avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Rappeler les valeurs de $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_2$.
2. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_2^n$ et calculer sa somme. La réponse ne fera pas apparaître de racine carrée au dénominateur.
3. Rappeler la formule de Leibniz donnant la dérivée $n$ième du produit de deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^n$.
4. En utilisant la relation $(x^2 + x - 1)f(x) = 1$, montrer que pour tout x dans un ensemble à préciser,

$$(x^2 + x - 1)f^{(n)}(x) + n(2x+1)f^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

dans le cas où $n \geqslant 2$.

5. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $u_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$.
   (a) Que valent u_0 et u_1 ?
   (b) Montrer que si $p \geqslant 2$ alors $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.
   (c) En remarquant que $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 2, exprimer u_p en fonction de l'entier p, λ_1 et λ_2.

6. Donner le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0 en utilisant le théorème de Taylor-Young.
7. (a) Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\frac{1}{x^2 + x - 1} = \frac{\alpha}{x - \lambda_1} + \frac{\beta}{x - \lambda_2}$$

   (b) Exprimer en fonction de λ_1 et λ_2 les dérivées $n$ièmes de $g_1 : x \mapsto \frac{\alpha}{x-\lambda_1}$ et $g_2 : x \mapsto \frac{\beta}{x-\lambda_2}$.
   (c) Retrouver le résultat de la question 5c

Partie II

1. Soit $x \in]0,1[$. Justifier la convergence et calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$.
2. En déduire, pour tout réel $y > 1$:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{y^n} = \frac{1}{y - 2 + \frac{1}{y}}$$
On justifiera avec soin toutes les étapes du calcul.
3. On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_0 = 0,\ w_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $w_n = w_{n-1} + w_{n-2}$.
   (a) Exprimer w_n en fonction de l'entier n.
   (b) Quel est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n x^n$?
   (c) Montrer que, pour des valeurs du réel x convenables :
   $$(1 - x - x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = x$$
   (d) En déduire, pour des valeurs du réel y que l'on précisera : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{y^n} = \frac{1}{y-1-\frac{1}{y}}$
   (e) Donner le développement en série entière de f en précisant l'intervalle de validité.