Exercice 1

Résoudre les relations de récurrence suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = \frac{n+1}{2(2n+1)} a_n$ et $a_0 = 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = \frac{-\frac{1}{2}-n}{n+1} a_n$ et $a_0 = 1$
3. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+2} = \frac{-1}{n+2} a_n$ en fonction de $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.
4. On fixe $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ un nombre impair. $\forall n > k\ a_n = \dfrac{-1}{n^2-k^2} a_{n-2}$ et $a_0, \ldots, a_{k-1} = 0$.

   Que se passe-t-il si k est pair ?

Correction

1. Brouillon : on a $a_1 = \frac{1}{2\times 1} a_0$, $a_2 = \frac{2}{2\times 3} a_1 = \frac{2\times 1}{2^2\times 1\times 3}$ puis $a_3 = \frac{3\times 2\times 1}{2^3\times 1\times 3\times 5}$.

   On calcule classiquement $\prod\limits_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2\times 4\times\cdots\times 2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

   L'astuce ici est de multiplier et diviser par $2\times 4\times\cdots\times 2n$ et factoriser cette quantité n fois par 2.

   Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

   C'est clairement vrai pour $n = 0$ puis, pour n fixé,

   $$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{(n+1)^2}{(2n)! \times 2(2n+1)(n+1)} = \frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!}$$

   ce qui prouve l'hérédité puis la propriété annoncée d'après le principe de récurrence.

2. Cette fois on trouve $a_n = \frac{(-1)^n \prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2}$.

3. Remarque : cette fois la relation relie a_{n+2} à a_n et on va donc trouver une expression pour les termes d'indices pairs et une expressions pour les termes d'indice impairs.

   On a $a_2 = \frac{-1}{2} a_0$, $a_4 = \frac{-1}{4}\frac{-1}{2} a_0$, $a_6 = \frac{-1}{6}\frac{-1}{4}\frac{-1}{2} a_0$

   On doit trouver pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2\times\cdots\times 2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$

   De même $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{1\times\cdots\times(2n+1)} = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!}$.

4. On a directement $a_{k+1} = 0 = a_{k+3} = \ldots$ et donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{k+2p+1} = 0$.

   Il reste les coefficients de la forme a_{k+2p} où $p \in \mathbb{N}$ à calculer.

   On a $a_{k+2} = \frac{-1}{(k+2)^2-k^2} a_k$, $a_{k+4} = \frac{(-1)^2}{((k+4)^4-k^2)((k+2)^2-k^2)} = \frac{(-1)^2}{(4)(2k+4)(2)(2k+2)}$ en factorisant chaque terme, ce qui semble être une bonne idée.

   Voyons : $a_{k+6} = \frac{(-1)^3}{6\times(2k+6)\times 4\times(2k+4)\times 2\times(2k+2)}$.

   il semble que

   $$\begin{aligned} a_{k+2p} &= \frac{(-1)^p}{2p\times\cdots\times 4\times 2\times(2k+2)\times\ldots(2k+2p)} a_k \\ &= \frac{(-1)^p}{2^p p! \times 2^p (k+1)\ldots(k+p)} a_k \\ &= \frac{(-1)^p k!}{4^p p!(p+k)!} a_k \end{aligned}$$

   Il reste à prouver notre conjecture par récurrence. Le coeur du calcul est $\frac{-1}{(k+2p+2)^2-k^2}\frac{(-1)^p k!}{4^p p!(p+k)!} = \frac{-1}{(2p+2)(2k+2p+4)}\frac{(-1)^p k!}{4^p p!(p+k)!} = \frac{-1}{4(p+1)(p+k+1)}\frac{(-1)^p k!}{4^p p!(p+k)!}$ qui, après avoir complété les factorielles, est bien notre expression en remplaçant p par $p+1$ (remarquer que le $k!$ du numérateur est indépendant de p et que la récurrence parte sur p).