

PTSI : suites, continuité, dérivabilités

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \ln(1 + 3x + x^n)$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif a_n tel que $f_n(a_n) = 1$.
2. Montrer que $0 \leq a_n \leq 1$ pour tout n .
3. Calculer a_0, a_1, a_2 .
4. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
5. Etudier la convergence ainsi que l'éventuelle limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction 1. La dérivabilité sur \mathbb{R}^+ ne pose pas de problème particulier. ;
Pour $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{3 + nx}{1 + 3x + x^n} > 0$$

Ainsi f est strictement croissante. De plus, $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow{+\infty} +\infty$. Comme f est continue, elle prend au moins une fois la valeur 1 d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie prouve l'unicité.

2. On sait que f_n est strictement croissante et $f_n(0) = 0 < 1 = f_n(a_n)$ donc $0 < a_n$. De même, $f_n(1) = \ln(5) > 1 = f_n(a_n)$ et donc $1 > a_n$.
3. On résout $\ln(2 + 3x) = 1 \iff 2 + 3x = e^1 \iff x = \frac{e^1 - 2}{3} = a_0$.
Pour $n = 1$, on résout $\ln(1 + 4x) = 1$ pour trouver $a_1 = \frac{e^1 - 1}{4}$.
Pour $n = 2$ on résout $\ln(x^2 + 3x + 1) = 1 \iff x^2 + 3x + 1 = e^1$. Le discriminant vaut $9 - 4(1 - e^1) = 5 + 4e^1$ et les deux solutions sont $\frac{-3 \pm \sqrt{5 + 4e^1}}{2}$. L'une est clairement strictement négative, donc $a_2 = \frac{\sqrt{5 + 4e^1} - 3}{2}$.
4. Pour $x \in [0, 1]$, $x^{n+1} \leq x^n$ donc $1 + 3x + x^{n+1} \leq 1 + 3x + x^n$ et par croissance de \ln , $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ ie $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$.
5. D'après la question précédente, $f_{n+1}(a_{n+1}) \leq f_n(a_{n+1})$ ie $1 \leq f_n(a_{n+1})$ ou encore $f_n(a_n) \leq f_{n+1}(a_n)$.

Par stricte monotonie de f , $a_n \leq a_{n+1}$. Ainsi (a_n) est croissante. De plus, (a_n) est majorée par 1 donc (a_n) converge vers une limite finie notée $\ell \in [a_0, 1]$.

Pour déterminer ℓ , on tente de faire tendre n vers $+\infty$ dans la relation de définition : $f_n(a_n) = 1$.

On a $1 + 3a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 + 3\ell$. De plus, $a_n^n = e^{n \ln(a_n)}$ Il y a deux cas. Si $\ell \in]0, 1[$ (ie $\ell < 1$), alors $\ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \ell < 0$ et donc $a_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors $f_n(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + 3\ell)$

et donc $\ln(1 + 3\ell) = 1$ c'est à dire $\ell = \frac{e^1 - 1}{3}$.

Sinon, $\ell = 1$ et la limite $n \ln(a_n)$ est indéterminée, mais on doit avoir $a_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^1 - 1 - 3\ell = e^1 - 4 < 0$ ce qui est impossible.

Finalement, $\ell = \frac{e^1 - 1}{3}$.

Exercice 2

1. Montrer que $\forall x > 0 \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de $\frac{x}{\arctan(x)} - \frac{2}{\pi}x$.

Correction 1. T.

2. On a $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x})$ pour $x > 0$.

Ainsi $\frac{x}{\arctan(x)} = \frac{x}{\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x})} = \frac{2}{\pi}x \frac{1}{1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\frac{1}{x})} = \frac{2}{\pi}x (1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\frac{1}{x}) + o_{+\infty}(\frac{1}{x}))$ et la limite cherchée vaut $\frac{4}{\pi^2}$

Séries, séries entières

Exercice 3 (Méthode)

Etudier la convergence des séries de terme général $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et $\frac{n!}{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}$.

Exercice 4

Etudier la convergence de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2(n)}$. On pourra encadrer les sommes partielles par des intégrales.

Exercice 5

1. Montrer que f , définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1.
2. Déterminer le développement en série entière de f et calculer son rayon de convergence.

Correction 1. D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur l'intervalle \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est sa primitive s'annulant en 0 et est donc de classe \mathcal{C}^1 .

Ainsi f est \mathcal{C}^1 par produit et $f' : x \mapsto 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} e^{-x^2} = 2xf(x) + 1$.

Donc y est solution de l'équation différentielle (E) : $y' - 2xy = 1$ (et vérifie en plus $f(0) = 0$).

2. Soit $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction DSE de rayon de convergence $R > 0$.

y est solution de (E) et $y(0) = 0 \iff$

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall x \in]-R, R[\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1} = 1$$

$$\iff a_0 = 0 \text{ et } \forall x \in]-R, R[\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1} x^n = 1$$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, $1a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1 (n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0$ ou encore $a_{n+1} = \frac{2}{n+1}a_{n-1}$. ON peut aussi noter cette relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+2} = \frac{2}{n+2}a_n$

Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}$ que $a_{2n}=0$ (en remarquant que c'est le cas pour $n = 0$ car $a_0 = 0$), on a alors $a_{2n+2} = 0$ et donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N} a_{2n} = 0$

Brouillon On cherche l'expression pour les indices impairs. On a $a_3 = \frac{2}{3}a_1 = \frac{2}{3}$, $a_5 = \frac{2}{3} \frac{2}{5}$ puis $a_7 = \frac{2}{7}a_5 \dots$. On doit avoir $a_{2n+1} = \frac{2^n}{3 \times \dots \times (2n+1)}$

Remarquons que $a_1 = 1$ et $a_3 = \frac{2}{3} = \frac{2^1}{\prod_{k=1}^1 1(2k+1)}$. Supposons, pour un $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ que $a_{2n+1} = \frac{2^n}{\prod_{k=1}^n n(2k+1)}$.

Alors $a_{2n+3} = \frac{2}{2n+3}a_{2n+1} = \frac{2^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1} n+1(2k+1)}$. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N} a_{2n+1} = \frac{2^n}{\prod_{k=1}^n n(2k+1)}$ avec la convention qu'un produit vide vaut 1.

Simplifions cette expression. $a_{2n+1} = \frac{2^n}{\prod_{k=1}^n n(2k+1)} \times \frac{\prod_{k=1}^n 2k}{\prod_{k=1}^n 2k} = \frac{2^n \times 2^n n!}{(2n+1)!}$.

Finalement, $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Vérifions que la série entière exhibée est bien de rayon $R > 0$. Pour $x \neq 0$, on note $b_n = \left| \frac{4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, d'après la relation de récurrence sur (a_n) , on a $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}} |x|^2 = \frac{2}{2n+3} |x|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'après le théorème de d'Alembert, $\sum_{n \geq 0} b_n$ converge, et ce pour toute valeur de x . Ainsi $R = +\infty$.

Donc y est la solution sur \mathbb{R} du problème de Cauchy $y' - 2xy = 1$ et $y(0) = 0$. Par unicité de la solution à un problème de Cauchy sur un intervalle, $f = y$ et on a donc donné le DSE de f , qui est de rayon $+\infty$.

Exercice 6

Déterminer le rayon de convergence ainsi que la somme des séries entières suivantes (d'une variable réelle x) ;

- $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
- $\sum_{n \geq 0} \text{ch}(n) x^n$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n \cos(n\alpha)}{n!}$

Correction On donne plusieurs méthodes pour le calcul du rayon, pas forcément les plus simples pour chaque question.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, on sait que $(|x|^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque $|x| < 1$, est constante pour $|x| = 1$ et n'est pas bornée pour $|x| > 1$.

Ainsi la suite $(a_n) = ((-1)^n n x^{2n+1})$ est bornée ssi $|x| < 1$ (dans ce cas elle tend vers 0) par croissances comparées). Par définition du rayon de convergence, il vaut $R = 1$.

Autres méthodes : invoquer le fait que la multiplication par n du terme général ne change pas le rayon, utiliser d'Alembert.

Pour $x \in]-1, 1[$, $f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = -x \sum_{n=0}^{+\infty} n(-x^2)^n$.

Or, pour $t \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$ par dérivation terme à terme de la série entière géométrique. Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} n t^n = \frac{t}{(1-t)^2}$ (en ajoutant un terme nul à la somme).

Finalement, comme on a bien $(-x^2) \in]-1, 1[$, $f_1(x) = -x \frac{-x^2}{(1-(-x^2))^2} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$.

- Notons encore une fois R le rayon cherché. On a $\text{ch}(n) \sim e^n$ et donc R est également le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} e^n x^2 = \sum_{n \geq 0} (ex)^n$.

Comme la série géométrique est de rayon 1, on a $R = \frac{1}{e}$ (en effet, $x \in]-R, R[$ ssi $|ex| < 1$).

Autres méthodes : d'Alembert.

Pour $x \in]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$, on a $f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} x^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} x^n \right)$ car ces deux séries numériques convergent (on a à la fois $|ex| < 1$ et $|e^{-1}x| < 1$).

En tant que séries géométriques convergentes, $f_2(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-ex} + \frac{1}{1-e^{-1}x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-ex} + \frac{e}{e-x} \right) = \frac{e-x+e-e^2x}{2(1-ex)(e-x)}$.

- Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $a_n = \frac{\cos(n\alpha)}{n!} x^n$. Alors $|a_n| \leq \frac{|x|^n}{n!}$. Comme la série exponentielle est de rayon de convergence $+\infty$, par comparaison de séries à

termes positifs, $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge absolument donc converge et le rayon cherché vaut $+\infty$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}(e^{in\alpha})}{n!} x^n$, ainsi $f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{(e^{i\alpha}x)^n}{n!} \right)$. La série complexe associée converge car c'est une série exponentielle et

$$f_3(x) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{i\alpha}x)^n}{n!} \right) = \operatorname{Re}(\exp(e^{i\alpha}x)) = \operatorname{Re}(\exp((\cos \alpha + i \sin \alpha)x))$$

Par propriété fonctionnelle de l'exponentielle, $f_3(x) = e^{\cos(\alpha)x} \operatorname{Re}(e^{i \sin(\alpha)x}) = e^{\cos(\alpha)x} \cos(\sin(\alpha)x)$

Exercice 7

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2} \end{cases}$$

On s'intéresse à la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$

- On note R le rayon de convergence de la série étudiée.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq a_n \leq n+2$.
 - En déduire que la suite (a_n) est monotone et déterminer R .
- Calcule de la somme. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2}$
 - Déterminer le domaine de définition de f et g .
 - Établir une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ pour les valeurs de x où cela a du sens.
 - Montrer que g est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera.
 - En déduire une expression de $f(x)$.

Correction 1. (a) Une simple récurrence en supposant $a_n \leq n+1$ et $a_{n+1} \leq n+2$, ce qui est vérifié pour $n=1$.

(b) On obtient facilement $a_{n+1} + \frac{1}{n+2} \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} + 1$ et donc (a_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

On encadre par deux séries de références : $R=1$.

- On a $\frac{a_n}{n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_n}{n}$ et on en déduit facilement que g est également définie sur $] -1, 1[$ au moins (rayon de cv égaux par division du TG par n).
 - Pour $x \in] -1, 1[$, on peut dériver terme à terme pour obtenir $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = x f(x)$.
 - Ré-écrivons, pour $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2} - a_{n+1}) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi $x^3 g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^{n+1} - x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} = g'(x) - a_1 x^2 - a_0 x - x(g'(x) - a_0 x)$ et finalement

$$x^3 g(x) = (1-x)g'(x) - x$$

Intégrales

Exercice 8

- Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que l'équation $\int_x^y e^{t^2} dt = 1$ d'inconnue y possède une unique solution.
- On définit une application f sur \mathbb{R} par $f(x) = y$ tel que définit à la question précédente. Montrer que f est continue. Est-elle dérivable?

Correction 1. Notons F une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ qui est bien continue sur l'intervalle \mathbb{R} . On choisit la primitive s'annulant en 0. Ainsi

$$F : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt.$$

L'équation s'écrit alors $F(y) - F(x) = 1$ où encore $F(y) = F(x) + 1$ où x est fixé et y l'inconnue.

Or F est strictement croissante sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R} . Calculons ses limites en $\pm \infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{t^2} \geq e^0 = 1$ et donc lorsque $x > 0$, $F(x) > x$. Ainsi, par encadrement $F(x) \xrightarrow{+\infty} +\infty$.

De plus, $F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt = - \int_{-x}^0 e^{t^2} dt < -x$ par le même raisonnement et on en déduit que $F(x) \xrightarrow{+\infty} -\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Comme F est strictement croissante, elle est injective et F est une bijection $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ainsi l'unique solution à l'équation proposée est $y = F^{-1}(F(x) + 1)$.

- On a, avec les notations précédentes, $f(x) = F^{-1}(F(x) + 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi f est continue car la réciproque d'une fonction continue est continue et par composition.

De plus, F^{-1} est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (ensemble d'arrivé de F) car F' ne s'annule pas sur \mathbb{R} (ensemble de départ de F).

Finalement, f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} par composition.

Exercice 9

Convergence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt$.

Correction Indication : comparaison à e^{-t} pour la convergence et changement de variable $u = e^{-t}$ pour le calcul. Attention à bien justifier la classe \mathcal{C}^1 et la bijectivité du changement de variable. On a en fait $\int \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt = \arctan(e^t)$ sur \mathbb{R} (notation de calcul de primitive, on précise donc l'intervalle de validité)

Exercice 10

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1+(na)^2}$.

- Etudier la convergence. La somme, quand elle existe, est notée $h(a)$.
- Etudier les variations de h , puis sa limite en $+\infty$.
- Prouver que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{1 + ((k+1)a)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{1 + (ta)^2} \leq \frac{1}{1 + (ka)^2}$$

- Donner un équivalent de h en 0.

Correction 1. On a $\frac{1}{1+(na)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2} \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série proposée converge par comparaison de séries à termes positifs, et ce pour toute valeur de a .

- Soit $N \in \mathbb{N}$. Remarquons déjà que h est paire sur \mathbb{R}^* . Soient $a, b > 0$ avec $a < b$. Alors pour tout $n \geq 0$, $\frac{1}{1+(nb)^2} \leq \frac{1}{1+(na)^2}$ par croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur \mathbb{R}^+ et décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi $\sum_{n=0}^N \frac{1}{1+(nb)^2} \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{1+(na)^2}$ et par passage à la limite ($N \rightarrow +\infty$) $h(b) \leq h(a)$. Ainsi h est décroissante sur \mathbb{R}_+^* et donc croissante sur \mathbb{R}_-^* . On en déduit que $\lim_{a \rightarrow +\infty} h(a)$ existe et est finie (car h est positive).

De plus, $\sum_{n=0}^N \frac{1}{1+(na)^2} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{1+(na)^2} \leq 1 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(na)^2} = 1 + \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$.

Notons ℓ la somme de la série de Riemann $\ell = \sum n = 1 + \infty \frac{1}{n^1}$. On a alors $1 \leq h(a) \leq 1 + \frac{1}{a^2} \ell$ par passage à la limite des inégalités larges et en minorant les sommes partielles par 1 (le premier terme de chaque somme).

Ainsi, par encadrement, $h(a) \underset{a \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$.

- On utilise la décroissance sur \mathbb{R}^+ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+(ta)^2}$ et la croissance de l'intégrale.
- En sommant pour k allant de 0 à N l'encadrement précédent, on obtient ¹

$$\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{1 + (na)^2} \leq \int_0^N \frac{1}{1 + (ta)^2} dt \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{1 + (na)^2}$$

. De plus, $\int_0^N \frac{1}{1 + (ta)^2} dt = \left[\frac{1}{a} \arctan(ta) \right]_0^N = \frac{1}{a} \arctan Na$.

On suppose pour l'instant que $a > 0$.

En faisant tendre N vers $+\infty$ et par passage à la limite des inégalités larges, $h(a) - 1 \leq \frac{1}{a} \frac{\pi}{2} \leq h(a)$ (le -1 dans le membre de gauche provient du fait qu'il manque le premier terme de la somme partielle)

On en déduit que $h(a) \underset{a \rightarrow 0^+}{\rightarrow} +\infty$ par comparaison, puis que $\frac{\pi}{2a} \leq h(a) \leq \frac{\pi}{2a} + 1$. En divisant par $\frac{\pi}{2a} > 0$ puis en faisant tendre $a \rightarrow 0^+$, on en déduit par encadrement que $h(a) \underset{a \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2a}{\pi}$ et donc $h(a) \underset{0^+}{\sim} \frac{\pi}{2a}$.

Le même calcul avec $a < 0$ donne $-\frac{\pi}{2}$ comme limite de $\arctan(Na)$ et le raisonnement est le même pour trouver $h(a) \underset{0^-}{\sim} -\frac{\pi}{2a}$.

Finalement, $h(a) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2|a|}$

Exercice 11

Soit E l'ensemble des fonctions f , continues sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans \mathbb{R} , telles que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t} dt \text{ converge.}$$

- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

1. on a également effectué un changement d'indice et utilisé la relation de Chasles

2. Montrer que $\varphi : \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt \end{cases}$ est bien définie et constitue un produit scalaire.
3. On définit sur $[0, +\infty[$ les fonctions $L_0(x) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$. Montrer que L_n est polynomiale de degré n .
4. Montrer que $L_n \in E$.
5. Montrer que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale pour le produit scalaire φ . On commencera par montrer que si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $k \in \mathbb{N}$ vérifie $k < n$, alors $\varphi(x^k, L_n) = 0$.

Correction 1. Très classique, il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2} \iff 0 \leq a^2 - 2|ab| + b^2 \iff 0 \leq (|a| + |b|)^2$ qui est clairement une inégalité vraie. Ainsi l'inégalité de départ est vraie.

2. Soient $f, g \in E$. On doit montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$ est convergente.

Or, pour $t \in \mathbb{R}^+, |f(t)g(t)e^{-t}| = |f(t)g(t)|e^{-t} \leq \frac{f(t)^2+g(t)^2}{2}e^{-t} = \frac{1}{2}f(t)^2e^{-t} + \frac{1}{2}g(t)^2e^{-t}$. Comme $t \mapsto f(t)^2e^{-t}$ et $t \mapsto g(t)^2e^{-t}$ sont intégrable sur \mathbb{R}^+ par hypothèse, par comparaison de fonction positives, $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ (**Rappel : intégrale signifie que l'intégrale de la valeur absolue converge**).

Ainsi $\varphi(f, g)$ est bien défini.

On doit montrer que E est un espace vectoriel, pour pouvoir considérer des quantités de la forme $\varphi(\alpha f_1 + \beta f_2, g)$. Soient $f_1, f_2 \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrons que $h : t \mapsto (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))^2 e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Or $h(t) = \alpha^2 f_1^2(t)e^{-t} + \alpha\beta f_1(t)f_2(t)e^{-t} + \beta^2 f_2^2(t)e^{-t}$ et donc h est une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur \mathbb{R}^+ et est donc intégrable sur \mathbb{R}^+ .

On a alors facilement $\varphi(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = \alpha\varphi(f_1, g) + \beta\varphi(f_2, g)$ car les intégrales considérées convergent bien. La symétrie est évidente, et on en déduit que φ est bilinéaire.

De plus, $\varphi(f, f) \geq 0$ en tant qu'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle.

Supposons maintenant que $\varphi(f, f) = 0$. Alors $h : t \mapsto f^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur l'intervalle \mathbb{R}^+ . On a donc $\forall t \in \mathbb{R}^+ f^2(t)e^{-t} = 0$ ie $f^2(t) = 0$ ou encore $f(t) = 0$. f est bien la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ , ce qui fini de prouver que φ est un produit scalaire.

3. D'après la formule de Leibniz, (valable car $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto x^n$ sont de classe \mathcal{C}^n), on a

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) \\ &= \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{-x} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} \end{aligned}$$

et donc L_n est bien une fonction polynomiale de degré n .

4. On a $x^2(L_n(x))^2 e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées ($L_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$ où a_n est le coefficient dominant de L_n). Ainsi $(L_n)^2 e^{-t} = o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge et que $x \mapsto (L_n(x))^2 e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (L_n(x))^2 e^{-x} dx$ converge par comparaison de fonctions positives. On a montré que $L_n \in E$.

5. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k < n$. On a $\varphi(x^k, L_n) = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx$.

Remarquons que la dérivée n ème qui apparaît est $L_n(x)e^{-x}$, c'est à dire un polynôme multiplié par e^{-x} et on retrouve le fait que l'intégrale converge. En intégrant par parties sur $[0, A]$, on trouve

$$\left[x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) \right]_0^A - \int_0^A k x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx.$$

Le crochet est de limite nulle quand $A \rightarrow +\infty$ (par croissances comparées de la forme $P(x)e^{-x}$ où P est un polynôme).

Ainsi $n! \varphi(x^k, L_n) = -k \int_0^{+\infty} x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx$. En itérant k fois,

$$n! \varphi(x^k, L_n) = (-1)^k k! \int_0^{+\infty} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) dx = (-1)^k k! \left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^n e^{-x}) \right] = 0$$

La dernière intégration est justifiée par le fait que $n - k > 0$ et donc on peut intégrer une dernière fois.

Ainsi $L_n \perp X^k$ pour tout $k < n$. Comme $\deg(L_k) = k$, on a prouvé que la famille (L_0, \dots, L_n) est bien une famille orthogonale, pour tout $n > 0$.

De plus, $\|L_n\|^2 = \varphi(L_n, L_n)$. D'après la forme polynomiale de L_n trouvée précédemment, son terme dominant est $\frac{(-1)^n}{n!} x^n$.

Par linéarité du produit scalaire, $\|L_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{n!} \varphi(x^n, L_n)$, car les autres termes dans la somme sont de la forme $\varphi(a_k x^k, L_n) = 0$. D'après le calcul pré-

cédent, valable sauf pour le dernier crochet, $n! \varphi(x^n, L_n) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx =$

$(-1)^n n! \times n!$ (voir le cours sur Γ , on a $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Ainsi, $\|L_n\|^2 = 1$ et la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien orthonormale.

Exercice 12

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+\beta} e^{-xt} dt$. Montrer que f_α est définie sur \mathbb{R}_+^+ (c'est à dire que l'intégrale considérée converge pour tout $x > 0$) puis montrer qu'elle y est \mathcal{C}^1 . On pourra montrer la classe \mathcal{C}^1 tout d'abord sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$ est fixé.

Pour aller plus loin : Donner ses variations et limites aux bornes. Est-elle \mathcal{C}^∞ ?

Exercice 13

1. Enoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Montrer le caractère \mathcal{C}^1 de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$

3. Trouver une équation différentielle vérifiée par f .

Exercice 14

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x} dt$, pour $x \geq 0$?

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ fixé, puis sur \mathbb{R}_+^* , et donner sa dérivée.

3. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

4. Pour aller plus loin : donner une équation différentielle vérifiée par f puis déduire une expression de f , ou encore déterminer un équivalent de $f(x)$ en 0 ou $+\infty$

Équations différentielles, EDP

Exercice 15 (Méthode)

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $xy' - y = \frac{x^2}{1+x^2}$.

Exercice 16 (Méthode)

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles :

1. $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^{2t}$

2. $y''(t) - 16y(t) = 0$

3. $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{2t}$

Exercice 17

On définit la fonction f par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin(t)) dt$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

2. Montrer que f vérifie l'équation différentielle (E) : $xy'' + y' + xy = 0$ grâce à une intégration par parties.

3. Appliquer la méthode de variation de la constante sur f pour déterminer une deuxième solution de (E).

4. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R}

Exercice 18 (Méthode)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer toutes les colonnes X de trois fonctions dérivables sur \mathbb{R} vérifiant $X' = AX$ et $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Quelle courbe est définie par X ?

Plusieurs variables

Exercice 19

Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$ et soit $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \rightarrow U \\ (t, u) & \mapsto (t + u, t - u) \end{cases}$.

1. Montrer que g réalise une bijection de $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur U et qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur V .

2. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U et à valeurs dans \mathbb{R} . On pose $F = f \circ g$. Déterminer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f .

3. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \frac{2}{x+y} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2}{x+y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{2}{2+x+y} f = (2+x+y) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

On suppose que f est une solution de (E) sur U , de classe \mathcal{C}^1 . Déterminer une équation dont F est solution.

4. Déterminer les solutions de (E) sur U .

Correction 1. Premièrement, pour $(t, u) \in V$, on a $g(t, u) = (t + u, t - u) = (x, y)$ qui vérifie bien $x + y = 2t > 0$ car $t \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi g est bien à valeurs dans U .

De plus, pour $(x, y) \in U$, on résout $g(t, u) = (x, y)$ d'inconnues t, u . On trouve immédiatement $t = \frac{x+y}{2}$ et $u = \frac{x-y}{2}$ et on a bien $t > 0$ et $u \in \mathbb{R}$. Cette solution (t, u) est unique, ce qui prouve que g est bien bijective (tout élément de U possède un et un seul antécédent dans V par la fonction g).

2. F est de classe \mathcal{C}^1 sur V par composition, et pour $(t, u) \in V$ on a $F(t, u) = f(t + u, t - u)$. En notant (x, y) les variables de f dans cet ordre, les dérivées partielles de F sont :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, u) = \frac{\partial f}{\partial x}(t+u, t-u) + \frac{\partial f}{\partial y}(t+u, t-u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial u}(t, u) = \frac{\partial f}{\partial x}(t+u, t-u) - \frac{\partial f}{\partial y}(t+u, t-u)$$

3. Pour $(x, y) \in U$ fixé, on pose $(t, u) \in V$ tel que $g(t, u) = (x, y)$ ie $x = t + u, y = t - u$.

Alors, par hypothèse sur f , on a

$$\frac{2}{x+y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) + \frac{2}{2+x+y} f(x, y) = (2+x+y) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Comme $x + y = 2t > 0$ et que $x = t + u, y = t - u$, d'après la question précédente on a

$$\frac{1}{t} \frac{\partial F}{\partial t}(t, u) + \frac{1}{1+t} F(t, u) = (1+t) \cos(t)$$

Comme g est bijective de V dans U , f est solution de (E) sur U ssi

$$\forall (t, u) \in V \quad \frac{1}{t} \frac{\partial F}{\partial t}(t, u) + \frac{1}{1+t} F(t, u) = (1+t) \cos(t).$$

4. Résolvons d'abord sur \mathbb{R}_+^* l'équation (E_1) : $\frac{1}{t} y'(t) + \frac{1}{1+t} y(t) = (1+t) \cos(t)$, qui est équivalente (sur \mathbb{R}_+^*) à $y'(t) + \frac{t}{1+t} y(t) = t(1+t) \cos(t)$.

Une primitive, sur \mathbb{R}_+^* , de $a : t \mapsto \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ est $A : t \mapsto t - \ln(1+t)$.

Ainsi les solutions de l'équation homogène associée à (E_1) sont les fonctions de la forme $t \mapsto K e^{-t + \ln(1+t)} = K(1+t)e^{-t}$ où $K \in \mathbb{R}$ est quelconque. On note $y_0 : t \mapsto (1+t)e^{-t}$, définie sur \mathbb{R}_+^* .

Cherchons maintenant une solution particulière sous la forme $y : t \mapsto K(t)y_0(t)$ où K est une fonction \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* à déterminer.

y est solution de (E_1) ssi après simplification $K'(t)y_0(t) = t(1+t) \cos(t)$ pour tout $t > 0$ ssi $K'(t) = t \cos(t)e^t$.

Cherchons une primitive

$$\begin{aligned} \int t \cos(t) e^t dt &= \operatorname{Re} \left(\int t e^{(1+i)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1+i} t e^{(1+i)t} - \int 1 \times \frac{1}{1+i} e^{(1+i)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1-i}{2} t e^t (\cos t + i \sin t) - \frac{1}{(1+i)^2} e^{(1+i)t} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1-i}{2} t e^t (\cos t + i \sin t) - \frac{1}{2i} e^t (\cos t + i \sin t) \right) \\ &= \frac{t e^t \cos t}{2} + \frac{t e^t \sin t}{2} - \frac{e^t \sin t}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, une solution de (E_1) est

$$y : t \mapsto \frac{e^t}{2} (t \cos t + t \sin t - \sin t) (1+t) e^{-t} = \frac{1+t}{2} (t \cos t + t \sin t - \sin t)$$

D'après la question précédente et pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto F(t, u)$ est solution de (E_1) , ainsi

$$F(t, u) = K(u) (1+t) e^{-t} + \frac{1+t}{2} (t \cos t + t \sin t - \sin t)$$

où K est une fonction \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (par différence et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas). Réciproquement, toute fonction de cette forme vérifie bien l'équation au dérivées partielles trouvée en question 3.

Finalement, f est solution de (E) sur U ssi il existe une fonction K de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que

$$\forall (x, y) \in U \quad f(x, y) = K\left(\frac{x-y}{2}\right) \frac{2+x+y}{2} e^{-\frac{x+y}{2}} + \frac{2+x+y}{4} (\dots)$$

où on a simplement remplacé t par $\frac{x+y}{2}$.

Exercice 20 (Méthode)

Déterminer les extrema locaux de f définie sur \mathbb{R}^2 par :

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$
2. $f(x, y) = x^3 + y^3$
3. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$

Correction Rappel de méthode : ici on travaille sur l'ouvert \mathbb{R}^2 , ainsi les seuls extrema se situent en un point critique (ie où le gradient est le vecteur nul, ou encore le plan tangent à la surface représentative est horizontal). On trouve donc d'abord les points critiques, puis on calcule pour chaque point critique la matrice hessienne. Le signe des valeurs propres donne la nature du point critique.

1. f est bien \mathcal{C}^1 en tant que fonction polynomiale. On résout
$$\begin{cases} 4x^3 - 2(x - y) = 0 \\ 4y^3 + 2(x - y) = 0 \end{cases}$$

qui est équivalent à
$$\begin{cases} 4x^3 - 2(x - y) = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases}$$
 par somme de lignes.

Or $x^3 + y^3 = 0 \iff (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \iff x = -y$ ou $x^2 - xy + y^2 = 0$. Pour résoudre la deuxième équation, on peut la réduire pour tenter de

tracer les solutions. La matrice de cette conique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Les deux valeurs propres réelles de A sont strictement positives ($\text{tr}(A) = 2 > 0$ et $\det(A) = \frac{3}{4} > 0$) donc l'équation réduite est de la forme $\lambda x'^2 + \mu y'^2 = 0$ avec $\lambda, \mu > 0$, dont la seule solution est $x' = y' = 0$ c'est à dire que notre conique est réduite à un point.

Finalement $x^2 - xy + y^2 = 0 \iff x = y = 0$ (une unique solution, qui est évidente).

Ainsi, $x^3 + y^3 = 0 \iff x = -y$ ou $x = y = 0$.

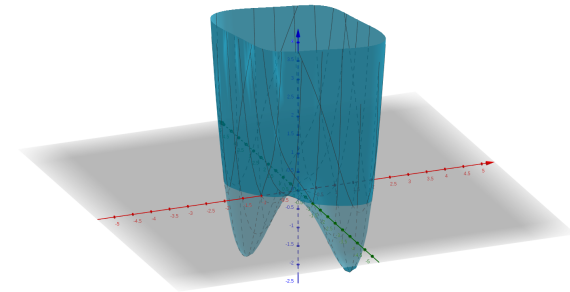
Dans le cas $x = y = 0$, on trouve effectivement un point critique car la première équation est clairement vérifiée. Dans le cas $x = -y$, la première équation devient $4x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2 - 1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$. Finalement, on trouve 3 points critiques : $(0, 0)$, $(1, -1)$ et $(-1, 1)$.

Calculons la matrice hessienne en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (f étant de classe \mathcal{C}^2), on trouve
$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$
. remarquons que d'après le théorème de Schwarz, H est symétrique réelle donc diagonalisable dans \mathbb{R} .

En $(0, 0)$, on a donc $H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Le déterminant est nul, on doit calculer les valeurs propres. Comme $\text{tr}(H) = -4$ et 0 est valeur propre (vu que H n'est pas inversible), les valeurs propres sont 0 et -4 . Ainsi f possède un maximum local en $(0, 0)$.

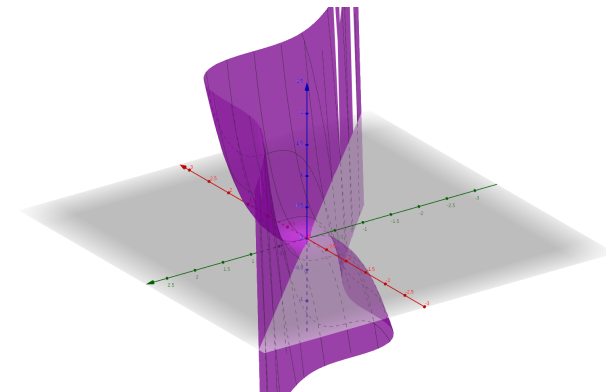
Les matrices hessiennes en $(-1, 1)$ et $(1, -1)$ sont égales à $H = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$.

Cette fois $\text{tr}(H) = 20 > 0$ et $\det(H) = 96 > 0$. Ainsi les deux valeurs propres réelles de H sont strictement positive et f possède deux minima locaux en ces points.



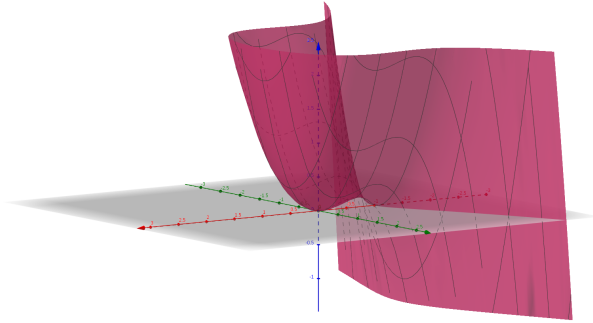
2. La rédaction sera beaucoup plus rapide ici, ce n'est pas un exemple à suivre. Cette fois on trouve un unique point critique en $(0, 0)$ (résolution très facile) et la matrice hessienne est $H = 0$. On ne peut pas conclure par la méthode du cours.

Par contre, observons que $f(0, 0) = 0$. On veut donc savoir si f est de signe constant au voisinage de $(0, 0)$ (suivant le signe trouvé, f possède un minimum ou un maximum) ou si au contraire f change de signe sur tout voisinage. Remarquons que $f(x, 0) = x^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui est une quantité qui change de signe en 0. Ainsi $(0, 0)$ est un point col (ni minimum ni maximum local).



3. Cette fois on trouve 2 points critiques en $(0, 0)$ et $(-\frac{2}{3}, 0)$. La matrice hessienne en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est $H = \begin{pmatrix} 2 + 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi en $(0, 0)$ les deux valeurs propres sont 2 et 2 strictement positives et le point est un minimum local, et en

$(-\frac{2}{3}, 0)$ les valeurs propres sont -2 et 2 et on obtient un point col. **Observez sur la surface représentative les points col** : si on parcourt la surface suivant l'axe (Ox) en rouge, on observe un maximum, alors que si on la parcourt parallèlement à (Oy) il s'agit d'un minimum, ce qui reflète le signe des valeurs propres -2 et 2 associées respectivement à e_1 et e_2 les deux vecteurs de la base canonique, car H est déjà diagonale



Exercice 21

Notons $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$.

1. Représenter \mathcal{D} et justifier que \mathcal{D} est borné. Pourquoi est-ce un fermé ?
2. On fixe $a, b, c \in]0, +\infty[$ et on considère $f : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x^a y^b (1 - x - y)^c \end{cases}$. Montrer que f est continue sur \mathcal{D} .
3. Déterminer $\sup_{(x,y) \in \mathcal{D}} f$.

Correction 1. On trouve le triangle rectangle délimité par les deux axes ainsi que la droite d'équation $x + y = 1$. \mathcal{D} est fermé (les inégalités sont larges : la frontière est totalement incluse dans \mathcal{D}) et borné (par exemple, le disque unité contient \mathcal{D}).

2. Comme a, b sont positifs, $x \mapsto x^a$ et $y \mapsto y^b$ sont continues sur \mathbb{R}^+ . De plus, pour $x, y \in \mathcal{D}$, $1 - x - y \geq 0$ et donc $(x, y) \mapsto (1 - x - y)^c$ est bien continue sur \mathcal{D} .

Par produit, f est continue sur \mathcal{D} .

3. f est \mathcal{C}^1 sur l'intérieur de \mathcal{D} (noté U), car on a alors $x > 0, y > 0$ et $1 - x - y > 0$ et le raisonnement précédent s'applique à la classe \mathcal{C}^1 . **Rappel** : les fonctions $t \mapsto t^\alpha$ sont continues en 0 dès que $\alpha \geq 0$ et dérivables en 0 dès que $\alpha \geq 1$.

Trouvons, si possible, le maximum de f sur U . Comme U est ouvert, cet éventuel maximum sera atteint en un point critique. Pour $(x, y) \in U$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^b (ax^{a-1}(1-x-y)^c + x^a \times c \times (-1) \times (1-x-y)^{c-1})$ et on obtient de même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^a y^{b-1} (1-x-y)^{c-1} (b(1-x-y) - cy)$$

Remarquons déjà que les puissances de x, y et $(1-x-y)$ ne s'annulent pas sur U .

$$\text{Ainsi } \vec{\text{grad}} f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} a(1-x-y) - cx = 0 \\ b(1-x-y) - cy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a+c)x + ay = b \\ bx + (b+c)y = a \end{cases}$$

Comme $a, b, c > 0$ ces quantités sont non nulles

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} f(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} (1 + \frac{c}{a})x + y = 1 \\ x + (1 + \frac{c}{b})y = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y = 0 \\ x + (1 + \frac{c}{b})y = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} bx - ay = 0 \\ bx + (b+c)y = b \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \frac{a}{a+b+c} \\ y = \frac{b}{a+b+c} \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve un unique point critique.

On a de plus, $f(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}) > 0$. Il reste à remarquer que f est nulle sur la frontière de \mathcal{D} (sur chaque côté du triangle, un terme du produit est nul). Comme f est continue sur un fermé borné, elle atteint forcément un maximum et un minimum. Le minimum de f est clairement 0 qui est atteint sur la frontière de \mathcal{D} . Le maximum de f ne peut pas être atteint sur la frontière (car f est strictement positive sur U) et est donc atteint en un point critique.

Ainsi f est maximale en $(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c})$ et le maximum vaut $(\frac{a}{a+b+c})^a (\frac{b}{a+b+c})^b (\frac{c}{a+b+c})^c$ ou encore $\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}$