Devoir en temps libre n°6

A rendre le 15/12 au plus tard. Les résultats seront souliignés ou $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous pouvez rédiger ce devoir à 2.

Exercice 1
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Partie I

On considère maintenant l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$

1. Calculer le rang de $A - \lambda I_3$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. En déduire le rang de A.
3. Calculer $A^3 - A^2 + 4A + 4I_3$ puis retrouver le résultat de la question précédente.
4. Rappeler la définition d'injectivité et de surjectivité.
5. Montrer que f est injective.
6. Montrer que f est surjective.
7. Calculer l'expression de la bijection réciproque de f en résolvant $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, ie $f(X) = Y$, pour $Y \in \mathbb{R}^3$ fixé et X inconnu. Qu'avons-nous calculé ?

Partie II

1. Résoudre l'équation $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$. On note x_1, x_2, x_3 les trois racines réelles, dans l'ordre croissant. Quel est le lien avec la partie précédente ?
2. Calculer le rang de $A - x_1 I_3$ et donner toutes les solutions du système homogène associé. On les notera sous la forme $\mathrm{Vect}(X_1)$.
3. Exprimer AX_1 en fonction de X_1.
4. De même, trouver X_2 et X_3, vecteurs directeurs de l'ensemble des solutions des systèmes homogènes de matrices respectives $A - x_2 I_3$ et $A - x_3 I_3$.
5. Montrer que la matrice B dont les 3 colonnes sont X_1, X_2, X_3 est inversible.
6. Soit $i \in [\![1, 3]\!]$. Montrer que $A^n X_i = x_i^n X_i$ pour tout entier naturel n.
7. Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $Y = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$ **après** avoir démontré que ces réels existent et sont uniques.
8. Calculer $A^n Y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de α, β, γ.