Révisions PTSI : polynômes, complexes, algèbre linéaire

Exercice 1
Montrer que $P(X) = X^3 + pX + q$ avec $(p, q) \neq (0, 0)$ ne peut pas avoir de racines triple.
Montrer que P possède une racine double ssi $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Exercice 2
Soit n un entier naturel impair et $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(E) : (X^n + 1)P(X) = P(X^2)$.

1. Montrer que le polynôme $X^n - 1$ vérifie la relation (E).
2. Déterminer le degré du polynôme P.
3. Notons ω une racine $n$ième de -1. Montrer que $-\omega$ est racine de P.
4. Quels sont tous les polynômes vérifiant (E) ?

Exercice 3 (Méthode)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\ker(f)$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Exercice 4
Montrer que $\varphi : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.

Pour aller plus loin : Trouver un antécédent de X^2 et calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 5
Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p \circ q = 0$.

1. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
2. Montrer que $\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$

Réduction

Exercice 6 (Méthode)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer que f est diagonalisable et exhiber une base de vecteurs propres.

Exercice 7
Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^4$ tels que $u \circ v = -v \circ u$ et $u \circ u = v \circ v = Id$.

1. Montrer que u et v sont de trace nulle et diagonalisables. Donner leurs valeurs propres et les dimensions des sous-espaces associés.
2. Montrer que si (e_1, e_2) est une base de $E_1(u)$ alors $(v(e_1), v(e_2))$ est une base de $E_{-1}(u)$.

Exercice 8
Montrer que $\varphi : P \mapsto P + (X-1)P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver ses éléments propres et déterminer si φ est diagonalisable.

Exercice 9
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : P \mapsto (3 - X)P'(X) - P(X) + X^2 P''(X)$ définie sur E.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique.
3. Est-il diagonalisable ?
4. f est-il un automorphisme ?

Exercice 10
Soit E un espace vectoriel, f et g des endomorphismes de E.

1. Montrer que toute valeur propre non nulle de $f \circ g$ est valeur propre de $g \circ f$.
2. Montrer que si E est de dimension finie, toute valeur propre de $f \circ g$ est valeur propre de $g \circ f$.
3. Dans cette question $E = \mathbb{R}[X]$, $f : P \mapsto XP$ et $g : P \mapsto P'$.
   Montrer que f et g sont des endomorphismes de E. Montrer que 0 est valeur propre de $f \circ g$. 0 est-il valeur propre de $g \circ f$? Conclure.

Exercice 11
Soient $n, d \in \mathbb{N}$ avec $d \leqslant n$.
Soit Q un polynôme de degré d et f_Q définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f_Q(P) = (P \times Q)^{(n)}$.

1. Montrer que f_Q est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur Q pour que f_Q soit un automorphisme.
3. Dans le cas où $n = 2$ et $Q = X - 1$, trouver les éléments propres de f.
4. Même question dans le cas $n = 2$ et $Q = X^2 - 1$.

5. A quelle(s) condition(s) sur Q, f est-il diagonalisable.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2Id = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.
3. On suppose maintenant que E est de dimension finie.
   Montrer que $\mathrm{Im}(f + Id) = \ker(f - 2Id)$.

Exercice 13

Soit $E = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $E = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\overline{z} | \ a, b \in \mathbb{C}\}$.
2. Calculer le déterminant et la trace de $f_{a,b}$.
3. Donner une CNS pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable.

Algèbre bilinéaire

Exercice 14 (Méthode)

Sans réduire les équations préciser le type des coniques suivantes :

1. $\mathcal{C}_1 : 4x^2 + 4xy + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0$
2. $\mathcal{C}_2 : x^2 - y^2 + 2x + 2y + 3 = 0$
3. $\mathcal{C}_3 : x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$
4. $\mathcal{C}_4 : 3x^2 + \sqrt{3}xy - 2y^2 + 2y - 7 = 0$

Exercice 15 (Méthode)

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique et on considère le sous-espace vectoriel F d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 2t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que F est un plan puis donner une base orthonormée de ce plan.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.
3. Soit $u \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $\mathrm{d}(u, F)$.

Exercice 16

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de $a et b$ a-t-on $A \in O_3(\mathbb{R})$?
2. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Dans le cas où $A \in O_3(\mathbb{R})$, préciser la nature de f.

Exercice 17

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $a \in \mathbb{R}$ et u un vecteur unitaire de E, on pose $f_a : x \mapsto x + a\langle x, u\rangle u$.

1. Montrer que f_a est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $A = \{f_a | \ a \in \mathbb{R}\}$ est stable pour la loi $\circ$ et commutatif.
3. Calculer f_a^p
4. Montrer que f_a est inversible ssi $a \neq -1$.
5. BONUS : donner l'interprétation géométrique du cas $a = -1$.

Exercice 18

On donne $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $\sigma = ab + bc + ac$, $s = a + b + c$.

1. Montrer que M est orthogonale ssi $\sigma = 0$ et $s \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi $\sigma = 0$ et $s = 1$.
3. $(\star)$ Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$

Exercice 19

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles.

On considère $\varphi : (f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définie sur $E \times E$

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
2. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ on pose $I(a, b, c) = \int_{-1}^{1} (|x| - ax^2 - bx - c)^2\mathrm{d}t$. Trouver (a, b, c) pour que $I(a, b, c)$ soit minimale.
3. Calculer ce minimum.