Exercice 1

Dans une urne contenant N boules numéroté de 1 à N, on tire, successivement et avec remise, p boules. On note X la variable aléatoire correspondant au maximum des p numéros tirés.

Décrire $(\Omega, \mathbb{P})$ modélisant l'expérience. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$ et en déduire la loi de X.

Exercice 2

Une urne contient $4n$ jetons numérotés de 1 à $4n$. Les jetons de 1 à n sont rouges, ceux de $n+1$ à $2n$ sont verts, et les autres sont blancs. On tire successivement et sans remise n jetons. On note A l'événement "au moins un des jetons tirés est vert", et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, T_k l'événement "on tire pour la première fois un jeton vert au k-ième tirage".

1. Décrire un univers Ω adapté à l'expérience aléatoire, et donner son cardinal.
2. Calculer la probabilité de l'événement A.
3. (a) Calculer $P(T_1)$.
   (b) Calculer $P(T_n)$.
   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(T_k) = \frac{(4n-k)!(3n)!n}{(4n)!(3n-k+1)!}$.

Exercice 3

Soit $c \in \mathbb{N}^*$.

Une urne contient à l'instant initial 1 boule blanche et 1 boule noire. On effectue une suite de tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on rajoute c boules blanches dans l'urne et de même pour les boules noires.

On note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on tire une boule blanche au $i$ème tirage, et 0 sinon.

1. Donner la loi et l'espérance de X_1.
2. Que représente $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$? Déterminer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 | Z_p = k)$ pour des valeurs de k à préciser.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}$.
4. Donner la loi de X_i pour $i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4

La cible d'un jeu de fléchette est constituée d'une zone jaune et d'une zone verte ; la probabilité d'atteindre la zone verte, quand la cible est atteinte, est de $\frac{1}{2}$ pour tous les joueurs.

Le joueur A atteint toujours la cible et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour atteindre la zone verte.

Le jour B atteint la cible avec une probabilité $p \in [0, 1]$.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Donner la probabilité que B atteigne la zone verte, pour un lancer.
3. Le gagnant est celui qui atteint la zone verte en premier. A commence : donner la probabilité qu'il gagne. Le jeu finit-il presque sûrement ?

Exercice 5

On considère une urne contenant $n-1$ boules noires et une boule blanche.

1. On effectue une succession de tirages avec remise et on note T la variable aléatoire donnant le rang de premier tirage amenant une boule blanche. Donner les valeurs prises par T, sa loi, son espérance et sa variance.
2. On effectue maintenant des tirages sans remise. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du tirage de la boule blanche. Donner les valeurs prises par X, sa loi, son espérance et sa variance.

   On note Y la variable donnant le nombre de boule noire restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimer Y en fonction de X et n. Donner l'espérance et la variance de Y.

Exercice 6

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2 \ \mathbb{P}((X,Y) = (j,k)) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E(2^{X+Y})$ existe et la calculer.

Exercice 7

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendante, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que $\forall a > 0 \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. Application. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

   A partir de quel nombre de tirage peut on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?

   Indication : considérer la suite (Y_n) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_n mesure l'issue du $n$ième tirage.

Exercice 8
Les deux questions sont indépendantes.

1. (a) Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre m, p.
   Déterminer la loi de X.

Exercices de synthèse, type concours

Exercice 9
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Les X_i représentent la répétition d'une même expérience aléatoire : la ième expérience est un succès si et seulement si X_i prend la valeur 1.

Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. On pose également $q = 1 - p$

1. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ainsi que son domaine de convergence.
2. Montrer que pour $m \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m}$$
3. On fixe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ pour le reste de l'exercice. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant n} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$ converge et que sa somme vaut 1.
   On peut maintenant définir une variable aléatoire Y_n à valeurs dans $\{n, n+1, \ldots\} = \mathbb{N} \cap [n, +\infty[$ par sa loi :
$$\forall k \geqslant n \ \mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}.$$
4. Reconnaître la loi de Y_1. Expliciter le coefficient binomial sous forme de quotient simple pour les lois de Y_2 et Y_3.
5. Expliquer rapidement pourquoi $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Pour $k \geqslant n$, calculer $\mathbb{P}(S_k = n \text{ et } S_{k-1} = n-1)$. Comment interpréter la loi de la variable Y_n ?
6. On pose Z_n la variable aléatoire dont la valeur est le nombre d'expérience nécessaire à l'obtention d'exactement n succès lors de notre répétition d'expérience (Z_n vaut le rang d'obtention du n-ème succès).
   (a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour Z_n ?
   (b) Sans utiliser la question 5, et en effectuant un raisonnement par dénombrement, montrer que Z_n suit la même loi que Y_n.
7. On considère la série entière de variable t réelle $\sum\limits_{k\geqslant n} \mathbb{P}(Y_n = k)t^k$ et on note f_n sa somme.
   Calculer le rayon de convergence R de cette série entière, et montrer en particulier que $R > 1$. Rappeler également le nom de cette série.
8. Calculer $f_n(t)$ pour $t \in]-R, R[$.
9. Montrer que Y_n est d'espérance finie et calculer $E(Y_n)$. On pourra penser à dériver f_n.
10. En dérivant f_n une seconde fois, montrer que Y_n est de variance finie et calculer $V(Y_n)$.

Exercice 10 (inspiré de Math A 2016)

1. On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $\forall x \in]-1,1[\ f(x) = \frac{1}{1-x}$.
   (a) Donner l'expression de la dérivée $k$ième de f pour tout $k \geqslant 0$.
   (b) En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ pour k entier positif.
2. Nous allons retrouver ce résultat. Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit $g : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ pour $k \in \mathbb{N}$ fixé.
   (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappeler sans justification le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ en précisant le rayon de convergence.
   (b) Montrer que $\forall x \in]-R, R[\ g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n}{k} x^n$ pour un $R \in]0, +\infty[$ à préciser.
3. Passons aux choses sérieuses. Soit $p \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires X, Y telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \forall k \in [\![0, n]\!] \ \mathbb{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(a) Reconnaître ces deux lois et donner une interprétation (ou un exemple de variable qui suit cette loi) pour chacune.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $k \in \mathbb{N}$. On suppose $k > n$. Que vaut $\mathbb{P}(Y = k|X = n)$? Justifier.

(c) Déterminer la loi du couple (X, Y), c'est à dire les probabilités $(X = n, Y = k)$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \times \mathbb{N}$.

(d) Montrer que la loi de Y est donnée par

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1-p}{2-p} \text{ et } \forall k \geqslant 1 \ \mathbb{P}(Y = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$$

(e) On considère deux variables aléatoire U, V indépendantes et $\lambda \in]0, 1[$. On suppose que U suit une loi de Bernoulli de paramètre λ et V suit une loi géométrique de paramètre λ.
On pose $Z = UV$. Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$ et pour $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(Z = k)$.

(f) Trouver λ pour que Z ait la même loi que Y.

Exercice 11 (Math A 2019)

Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \ \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \frac{\alpha}{2^{k+\ell}}$$

1. Déterminer la valeur de α
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Justifier que, pour tout $x \in]-1, 1[$, nous avons
$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \ \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$
4. Calculer $\mathbb{E}(X), Var(X), Cov(X, Y)$.
5. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \geqslant n)$.
6. On pose $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de Z.
7. Calculer les probabilités suivantes :
$$\mathbb{P}(X = Y), \ \mathbb{P}(X < Y), \mathbb{P}(X = rY)$$
où $r$est un nombre rationnel positif fixé.
8. On pose $T = X - Y$. Déterminer la loi du couple (Z, T) en précisant dans un premier temps les valeurs possibles prises par ce couple.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
9. Calculer la loi conditionnelle de Z sachant $X = k$.