

## Table des matières

<b>I Sur les fonctions</b>	<b>1</b>
I.1 Relations de comparaisons . . . . .	1
I.2 Les outils de calcul . . . . .	1
I.3 Croissances comparées . . . . .	2
<b>II Sur les suites</b>	<b>3</b>
II.1 Rappels sur les suites géométriques . . . . .	3
II.2 Comparaison des suites . . . . .	3

## I Sur les fonctions

### I.1 Relations de comparaisons

#### I.1.1 Définition

Soit  $I$  un intervalle,  $a \in \bar{I}$  et  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a$  est dans  $I$  ou est une borne de  $I$ , éventuellement infinie)

- On dit que  $f \sim_a g$  ssi  $\frac{f}{g} \rightarrow 1$  et  $\frac{g}{f} \rightarrow 1$ . ( $f$  et  $g$  sont équivalentes, au voisinage de  $a$ )  
 Cette définition n'a du sens que lorsque le calcul de ces limites en  $a$  un.
- On dit que  $f =_a o(g)$  ou  $f = o_a(g)$  ssi  $\frac{f}{g} \rightarrow 0$ . ( $f$  est négligeable devant  $g$ , au voisinage de  $a$ )

En particulier les fonctions  $f$  et  $g$  ne peuvent pas être la fonction nulle

#### I.1.2 Remarque

On ne peut donc pas écrire  $f \sim 0$  avec notre définition...

#### I.1.3 Piège

Ce n'est pas parce que  $f_1 \sim_a g_1$  et  $f_2 \sim_a g_2$  que  $f_1 + f_2 \sim_a g_1 + g_2$ .

### I.2 Les outils de calcul

#### I.2.1 Proposition

Avec les notations de la définition précédente, on a  $f \sim_a g \iff f = g + o_a(g) \iff g = f + o_a(f)$ .

Il s'agit de l'outil le plus pratique pour passer d'un équivalent à un "développement", et réciproquement. On retrouve ici que l'équivalent en  $a$  d'une fonction est le premier terme non nul dans un développement limité en  $a$ .

#### I.2.2 Théorème (Taylor-Young)

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . Alors  $f$  possède un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  sous la forme

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \\
 &\dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o_a((x-a)^n) \\
 &= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + o_a((x-a)^n)
 \end{aligned}$$

#### I.2.3 Ecriture en 0

Dans le cas des formules usuelles,  $a$  est pris égal à 0 et on obtient

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o_0(x^n)$$

Une chose à bien retenir : les facteurs des puissances de  $x$  sont des nombres qui sont en fait les coefficients d'un certain polynôme.

#### I.2.4 Les développements usuels

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On a au voisinage de 0 les développements limités usuels suivant (à connaître!)

- Exponentielle, logarithme, puissances

$$e^x =$$

$$\ln(1+x) =$$

$$\frac{1}{1-x} =$$

$$(1+x)^\alpha =$$

## 2. Trigonométrie circulaire

$$\sin x =$$

$$\cos x =$$

## 3. Trigonométrie hyperbolique.

$$\operatorname{sh} x =$$

$$\operatorname{ch} x =$$

### I.2.5 Proposition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

Si  $f'$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n+1$  en  $a$  qui s'obtient en calculant terme à terme une primitive du développement de  $f'$  et en choisissant comme constante la valeur  $f(a)$ .

### I.2.6 A savoir retrouver

En utilisant la méthode d'intégration terme à terme (sans oublier de rajouter la bonne constante d'intégration, à savoir le terme  $f(0)$  dans Taylor-Young)

1. Le développement à tout ordre de arctan
2. Les développements à un ordre donné de arcsin, arccos

### I.2.7 Règles de calcul

Rappel :

- On peut multiplier, diviser ou mettre à une puissance **fixée** une relation d'équivalence, mais pas sommer ni soustraire terme à terme. On ne peut **pas** composer de chaque côté une relation d'équivalence par une fonction (en particulier, par exp ou ln).
- Les développements sont des égalités qui se manipulent donc comme telles, avec les règles de calculs connues sur les  $o_a$  :
  - Dans le cas d'une forme  $o_a(f) + o_a(g)$  on conserve un seul "petit o" : on retire celui qui est négligeable devant l'autre.
  - $o_a(f) \pm o_a(f) = o_a(f)$  : rien ne sert de faire apparaître un signe moins devant un  $o_a$ , ni d'avoir deux fois le même  $o_a$  dans une somme.
  - $f \times o_a(g) = o_a(fg)$ .
  - A l'intérieur d'un "petit o" ou d'un "grand o", on peut remplacer une expression par son équivalent.
  - On peut effectuer des changements de variables dans les développements usuels en 0, à condition que la nouvelle variable tende bien vers 0.

Conclusion : à par pour une multiplication ou division (ou mise à une puissance fixe) terme à terme, on passera systématiquement par un développement en utilisant la règle  $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g) \iff g = f + o_a(f)$ .

## I.3 Croissances comparées

### I.3.1 Sur les puissances

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  avec  $\alpha < \beta$ . Les comportements en 0 et  $+\infty$  sont opposés :

$$x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \text{ et } x^\beta = o_0(x^\alpha)$$

### I.3.2 Théorème (Retour en terminale)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Ces résultats nous permettent de démontrer la version suivante, vue en 1ère année

**I.3.3 Théorème (Comparaison en  $+\infty$ )**

Soient  $\alpha, \beta \in ]0, +\infty[$ . Ces nombres sont **strictement positifs**.

1.  $(\ln(x))^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ .
2.  $x^\beta = o_{+\infty}(e^x)$

**I.3.4 Théorème (Comparaison en 0)**

Soient  $\alpha, \beta \in ]0, +\infty[$ .  $|\ln(x)|^\alpha = o_0\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$  ou encore  $x^\beta |\ln(x)|^\alpha \xrightarrow{0^+} 0$ .

**II.1.3 Théorème (Limites des suites géométriques)**

Soit  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

1.  $q^n \xrightarrow{+\infty} 0$  ssi  $|q| < 1$ . C'est le seul cas de suite géométrique convergente.
2. Dans le cas où  $q \in \mathbb{R}$  on peut ajouter que  $q^n \xrightarrow{+\infty} +\infty$  ssi  $q > 1$ .

**II Sur les suites**

Ici la situation est plus simple, car les seules limite que l'on peut étudier sont quand l'indice (souvent noté  $n$ ) tend vers  $+\infty$

**II.1 Rappels sur les suites géométriques**

**II.1.1 Forme des suites géométriques**

Ce sont les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui vérifient une relation de récurrence de la forme  $u_{n+1} = qu_n$  où  $q \in \mathbb{C}$  est fixé (comprendre, ne dépend pas de l'indice  $n$ ).

On a alors, par une récurrence facile,  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = u_0 q^n$ .

**II.1.2 Lemme**

Soit  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Si  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors sa limite est 0.

**Preuve.**

Notons  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = q^n$  et supposons que  $u_n \xrightarrow{+\infty} l \in \mathbb{C}$ .

Alors  $u_{n+1} \xrightarrow{+\infty} l$ . Mais pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} = q^{n+1} = qu_n$  et donc par produit de limites finies  $u_{n+1} \xrightarrow{+\infty} ql$ . Par unicité de la limite,  $l = ql$  et donc  $l(q - 1) = 0$ . Comme  $q - 1 \neq 0$  on a alors  $l = 0$  ■

**II.2 Comparaison des suites**

**II.2.1 Proposition**

Soient  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite **bornée** et  $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite.

1. Si  $v_n \xrightarrow{+\infty} 0$  alors  $u_n v_n \xrightarrow{+\infty} 0$ .
2. Si  $v_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$  alors  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{+\infty} 0$  ou encore  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ .

**II.2.2 Définition**

Soient  $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  deux suites avec  $(v_n)$  qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que  $(u_n)$  est **dominée** par  $(v_n)$  ssi la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

On note alors  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  (grand o).

**II.2.3 Règles de calcul**

Elles sont les mêmes que pour les petits o. En particulier on pourra écrire

1.  $O_{+\infty}(u_n) = u_n O_{+\infty}(1)$
2.  $O_{+\infty}(u_n) \pm O_{+\infty}(u_n) = O_{+\infty}(u_n)$

avec, comme d'habitude, la précaution élémentaire de se souvenir que chaque  $O$  représente une suite, et que ces suites ne sont pas égales même si elles s'écrivent sous la même forme.

**II.2.4 Proposition (Comparaison à une suite géométrique)**

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs **strictement positive**. On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{+\infty} \ell \in \mathbb{R}^+$  (ou  $\ell = +\infty$ ).

1. Si  $\ell < 1$ , alors pour tout  $q \in ]\ell, 1[$ ,  $u_n = o_{+\infty}(q^n)$ .

2. Si  $\ell > 1$ , alors pour tout  $q > ]1, \ell[$ ,  $q^n = o_{+\infty}(u_n)$ .

Dans le cas  $\ell = 1$ , on ne peut pas comparer  $(u_n)$  à une suite géométrique.

**Preuve.**

**Correction** On traite le cas  $0 \leq \ell < 1$ . Le cas  $\ell > 1$  est une conséquence directe en passant à l'inverse.

Soit  $q \in ]\ell, 1[$ . On pose  $a = \frac{q+\ell}{2}$  (le milieu de  $q$  et  $\ell$ , sur la droite réelle). Alors on a  $\ell < a < q < 1$ .

A partir d'un certain rang  $n_0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \in [\ell, a]$ . Ainsi pour  $n > n_0$ , on peut écrire

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0}$$

Par multiplications d'inégalités entre nombres positifs, on a donc  $u_n \leq a^{n-n_0} u_{n_0} = a^n K$  où  $K = \frac{u_{n_0}}{a^{n_0}}$  est une constante (on a fixé  $q$ ).

Toujours par multiplication d'inégalités entre nombres positifs,  $0 \leq \frac{u_n}{q^n} \leq K \left(\frac{a}{q}\right)^n$ . or  $\frac{a}{q} \in [0, 1[$  et donc par le théorème d'encadrement,  $u_n = o_{+\infty}(q^n)$ .

### II.2.5 Corollaire

Avec les mêmes notations, et toujours pour  $(u_n)$  **strictement positive**

1. Si  $l < 1$ , alors  $u_n \xrightarrow{+\infty} 0$ .

2. Si  $l > 1$  alors  $u_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$ .

Le résultat de la proposition est plus précis, car il indique que  $(u_n)$  tend "plus vite" que certaines suites géométriques.

### II.2.6 Théorème

Soient  $\alpha, \beta \in ]0, +\infty[$ . Soit  $q > 1$ .

1.  $\ln(n)^\alpha = o_{+\infty}(n^\beta)$ .

2.  $n^\beta = o_{+\infty}(q^n)$

3.  $q^n = o_{+\infty}(n!)$ .

4.  $n! = o_{+\infty}(n^n)$ .

## Index

Croissances comparées, 2, 3

Règle de d'Alembert  
pour les suites, 4

Suites géométriques, 3

Taylor-young, 1