Devoir maison 1

A rendre le au plus tard le 08/09/2020.

Exercice 1

Les questions sont indépendantes. Vous trouverez au verso quelques indications pour vous aider dans vos recherches.

1. On pose $f : x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = a \in \mathbb{R}$. Préciser la valeur de a pour que f soit continue en 0.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\mathrm{ch}(x)-1} - \frac{2}{x^2}$.
3. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 et $f : t \mapsto \exp(e^t - 1)$ et en déduire $f^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0, 3]\!]$.
4. Montrer que pour $x > 0$, $\arctan(\frac{1}{x}) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. En déduire un développement à 3 termes de $\arctan(x)$ quand $x \to +\infty$.

1. On dit que f est continue en 0 ssi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Ainsi a doit être la valeur de cette limite, et d'après l'énoncé on doit trouver une limite finie.

2. Ici on a une différence indéterminée de deux quotients. On peut penser à mettre au même dénominateur pour calculer un équivalent du numérateur (attention à la différence !) et du dénominateur (qui se calcule par produits d'équivalents cette fois).

3. La première partie de la question est purement technique : on effectue un changement de variable dans un DL connu, en prenant bien garde au calcul sur les o_0.
4. On cherche un développement de la forme $\arctan(x) = k_1 + \frac{k_2}{x} + \frac{k_3}{x^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$, toujours suivant les puissances de x (avec des coefficients constants), mais cette fois les puissances que l'on obtient sont négatives.

   Remarquez que dans ce développement, chaque terme est négligeable devant tous les précédents, c'est pour cela qu'on choisit cet ordre.