Devoir maison 2

A rendre le au plus tard le 15/09/2020.

Exercice 1
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$, que on appelle série de Bertrand.

1. Question préliminaire : pourquoi le premier indice de somme est-il 2 ?
2. On suppose $\alpha > 1$. Trouver un réel $\gamma > 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Conclure sur la nature de la série dans ce cas.
3. On suppose $\alpha < 1$. Trouver un réel $\gamma \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\gamma} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}\right)$. Conclure.
4. On suppose maintenant $\alpha = 1$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ suivant la valeur de β en utilisant une comparaison série-intégrale.
5. Résumer, dans un tableau, la nature des séries de Bertrand suivant les valeurs de α et β

Indications :

1.
2. Revenir à la définition de $o_{+\infty}$ pour trouver une condition supplémentaire que doit vérifier γ.
3. Idem
4. Nous avons un exemple complet d'application : la preuve du théorème donnant la nature des séries de Riemann.
5. On peut, par exemple, indiquer des valeurs de α en lignes et celles de β en colonnes.