

# Table des matières

## I Séries convergentes

I.1	Vocabulaire . . . . .	1
I.2	Séries de référence . . . . .	1
I.3	Séries à termes positifs . . . . .	1
I.4	Application à l'étude de suites . . . . .	2

## II Convergence absolue

II.1	Convergence d'une série complexe . . . . .	2
II.2	Propriétés . . . . .	2
II.3	Approximations et restes . . . . .	2

# I Séries convergentes

## I.1 Vocabulaire

### Définition 1

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite.

- On appelle série de terme général  $u_n$  et on note  $\sum u_n$  ou  $\sum_{n \geq 0} u_n$  la **suite**  $(S_N)$  définie par

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad S_N = \sum_{n=0}^N u_n$$

On dit que  $S_N$  (le nombre) est la  $N$ ième somme partielle de cette série.

Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé  $n_0$  (ce qui revient à poser  $u_n = 0$  pour  $n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket$ ). Dans ce cas la série est notée  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ .

- On dit que la série  $\sum u_n$  converge ssi la suite des somme partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge. Sa **nature** est d'être convergente ou divergente.

Quand elle existe, on note  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.

- Dans le cas d'une série convergente, la suite des restes de la série est la suite définie par  $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - S_N$

### Proposition 1

Soit  $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite de complexes et notons  $z_n = x_n + iy_n$  la forme algébrique de chaque terme.

$\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n$  converge ssi  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} y_n$  convergent. En cas de convergence on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

### 2 Définition-Proposition 1

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

**SI**  $u_n \not\rightarrow 0$  **ALORS**  $\sum u_n$  diverge.

Dans ce cas on dit que  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

### Proposition 2

Considérons 2 séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .

— Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent alors  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \sum (\lambda u_n + \mu v_n)$  converge. Dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

— Si  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge alors  $\sum (u_n + v_n)$  diverge.

— Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent, on ne peut rien dire a priori sur  $\sum (u_n + v_n)$  (cette dernière série peut être convergente ou divergente, suivant les cas).

## I.2 Séries de référence

### Proposition 3 (Séries géométriques)

Soit  $q \in \mathbb{C}$ .  $\sum_{n \geq 0} q^n$  converge ssi  $|q| < 1$  et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

### Théorème 1

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

## I.3 Séries à termes positifs

### Théorème 2

Soit  $(u_n)_n$  une suite de réels **positifs**.  $\sum u_n$  converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Dans ce cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup \left( \left\{ \sum_{k=0}^N u_n \mid N \in \mathbb{N} \right\} \right)$ .

### Théorème 3 (Comparaison des séries à termes positifs)

Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  des suites de réels positifs.

1. Si  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
3. Si  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
4. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ,  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont la même nature.

### Théorème 4

Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  des suites de réels négatifs.

1. Si  $v_n \leq u_n$  à partir d'un certain rang et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
3. Si  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
4. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ,  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont la même nature.

### Proposition 4

Si on a  $(u_n)$  et  $(v_n)$  positives :

1. Si  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang et  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge.
2. Si  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge.

### Théorème 5 (Règle de d'Alembert)

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ . Supposons que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$ .

1. Si  $\ell < 1$  alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $\ell > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge.
3. Si  $\ell = 1$  la série peut être divergente ou convergente.

## I.4 Application à l'étude de suites

### Proposition 5

Soit  $(u_n)_n$  une suite.  $(u_n - u_0)_{n \in \mathbb{N}}$  à la même limite (ou absence de limite) que  $\sum (u_{n+1} - u_n)$ .

## II Convergence absolue

### II.1 Convergence d'une série complexe

#### Définition 2

Soit  $\sum u_n$  une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

#### Théorème 6

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Si  $\sum u_n$  converge absolument alors  $\sum u_n$  converge et on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

### II.2 Propriétés

#### Proposition 6

Soient  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  avec  $\forall n \in \mathbb{N} v_n \geq 0$ .

1. Si  $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} v_n$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
3. Si  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.

#### Théorème 7

Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries de complexes absolument convergentes.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Alors la série  $\sum c_n$  converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

### II.3 Approximations et restes