Manipulations algébriques

Exercice 1

1. *Simplifier l'expression (sous forme de 2 facteurs) :* $A = \frac{\sqrt[5]{96}\,\sqrt[15]{3}\,\sqrt[3]{9}\sqrt{12}}{(\sqrt[3]{\sqrt{3}})^2\sqrt{18}\,\sqrt[4]{27}\,\sqrt[3]{6}}$.
2. *Pour* $x \geqslant 0$ *et* $x \neq 1$, *simplifier l'expression (en factorisant)* $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. *De même pour* $a, b \geqslant 0$, $(a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + (b^2 + b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ *:*

1. $3^{x+1} + 9^x = 4$
2. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{8}{27}\right)^{1-x} = \frac{2}{3}$
3. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Fonctions et puissances réelles

Exercice 3

Etudier la fonction $f : x \mapsto x + \frac{48}{\sqrt[3]{x}}$.

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$. *On note* T *la tangente à sa courbe représentative en 1. Tracer ces courbes en précisant leurs positions relatives.*

Indication : pour la position relative au voisinage de 1 (qui nous suffit pour le tracé), utiliser les développements (expression en o, en posant $x = 1 + u$ *pour avoir* $u \underset{x\to 1}{\to} 0$*).*

Exercice 5

Donner la limite de $\sqrt[n]{x}$ *dans deux cas : on fixe* n *et on fait trendre* x *vers* $+\infty$, *puis on fixe* $x \geqslant 0$ *et on fait trendre* n *vers* $+\infty$.

Exercice 6

1. *Soit* u *une fonction définie et dérivable sur un intervalle* I *à valeurs strictement positives et* v *une fonction dérivables sur* I. *Montrer que* $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ *est dérivable et calculer sa dérivée.*

   Cette formule n'est pas à retenir, mais il faut savoir en retrouver des cas particuliers, comme dans la question suivante.
2. *Etudier* $f : x \mapsto x^x$.

Exercice 7

On pose $f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. *Donner le domaine de définition de* f *et étudier ses limites et asymptotes éventuelles. On ne demande pas les variations.*

Croissances comparées

Exercice 8

On pose $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ *et* $f(0) = 0$. *Montrer que* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *puis que* f *est dérivable en 0 puis enfin que* $f' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 9

Simplifier les expressions (on a indiqué en indice des o le points qui nous intéresse)

1. $u_n = 5 + \underset{+\infty}{o}(n) + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \underset{+\infty}{o}(\ln n)$.
2. $v_n = \sqrt{n} + o_{+\infty}\left(\frac{n}{\ln n}\right) + o_{+\infty}\left(n^{\frac{26}{27}}\right)$
3. $w_n = 1 + o_{+\infty}\left(e^{((\ln n)^2)}\right) + o_{+\infty}\left(n^2\right)$.
4. $f_4(x) = x^3 + 2 + o_0(x) + o_0\left(x^2\right)$
5. $f_5(x) = x + o_0\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + o_0(\ln x)$
6. $f_6(x) = \ln^2(x) + o_0\left(x^{-2}\right) + o_0\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 10

Déterminer un équivalent des procédés suivants :

1. n *fixé,* $\cos(nx)\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$ *en 0.*
2. $\frac{x^2+\ln x}{x^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^x}$ *en* $+\infty$.
3. $\frac{\sqrt[4]{x+x^{\frac{6}{5}}}}{x^{-1}+1}$ *en 0.*
4. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}$ *en 0 et en* $+\infty$
5. $(x+1)^x - x^x$ *en 0*
6. $\ln(1 + e^{2x})$ *en* $+\infty$ *puis en 0.*