Table des matières

I Opérations vectorielles

On se place dans $\mathbb{R}^n$ avec $n = 2$ ou 3.

I.1 Produit scalaire

I.1.1 Propriétés

Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$ (n = 2 ou 3, mais plus s'il le faut, la définition ne change pas).

Le produit scalaire de X et Y est $< X, Y >= (X|Y) = {}^tXY = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. avec des notations évidentes pour les coordonnées dans la base canonique.

1. symétrie : $(X|Y) = (Y|X)$. C'est évident sur la formule a l'aide d'une somme. On peut également remarquer que ${}^tXY$ est un nombre et donc ${}^t({}^tXY) = {}^tYX$ est le même nombre.
2. Bilinéarité : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, X_1, X_2, Y \in \mathbb{R}^n$
$$(\alpha X_1 + \beta X_2|Y) = \alpha(X_1|Y) + \beta(X_2|Y) \text{ linéarité à gauche}$$
$$(Y|\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha(Y|X_1) + \beta(Y|X_2) \text{ linéarité à droite}$$
3. positivité : $(X|X) \geqslant 0$.
4. le produit scalaire est défini : $(X|X) = 0 \iff X = 0$.
5. On a $\|X\|^2 = (X|X)$.

Exercice 1
Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2(X|Y) + \|Y\|^2$. Calculer $\|X - Y\|^2$ et $(X - Y|X + Y)$.

Exercice 2
Exprimer $(X|Y)$ en fonction de normes.

I.1.2 Orthogonalité

Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

I.1.3 Distance

La distance entre deux éléments de $\mathbb{R}^n$ est la norme de leur différence : $\mathrm{d}(X, Y) = \|X - Y\| = \|Y - X\|$

Exercice 3
A quelle condition un parallélogramme est-il un losange ? un rectangle ? Le prouver !

I.2 Produit vectoriel

On se place obligatoirement dans $\mathbb{R}^3$ cette fois.

I.2.1 Propriétés

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

1. Si $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u \wedge v$ est orthogonal à u et v.
2. $u \wedge v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff u$ et v sont colinéaires.
3. Si u, v sont non colinéaires, $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de l'espace.
4. Le produit vectoriel est bilinéaire.
5. le produit vectoriel est anti-symétrique, ie $u \wedge v = -v \wedge u$.
6. $\|u \wedge v\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur u et v (qui peut être plat, et on retrouve la CNS de colinéarité).

I.2.2 Construction de base orthonormée directe

Si on a $u, v \in \mathbb{R}^3$ tels que $u \neq 0, v \neq 0$ et $u \perp v$, alors on peut poser $u' = \frac{1}{\|u\|} u$ et $v' = \frac{1}{\|v\|} v$. Alors, si $w' = u' \wedge v'$, la base (u', v', w') est orthonormée directe.

Exercice 4
Construire une base orthonormée directe dont les deux premiers vecteurs forment une base du plan $P : x - z = 0$.

I.3 Déterminant

I.3.1 Définitions

1. Dans le cas du plan, et pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ (coordonnées dans la base canonique) alors
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

2. Dans le cas de l'espace, pour $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle *produit mixte* ou déterminant de ces trois vecteurs le réel
$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) =< (\vec{u} \wedge \vec{v}), \vec{w} >$$
En exprimant les coordonnées dans la base canonique, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ on a
$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

I.3.2 Propriétés

1. n vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^n$ ssi leur déterminant dans la base canonique est non nul.
2. On déduit du premier point qu'une matrice carrée de taille 2 ou 3 est inversible ssi son déterminant est non nul.
3. le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne.
Par exemple, pour $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha, \beta \in R$ on a (dans la base canonique)
$$\det(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \det(u, w) + \beta \det(v, w)$$
4. une base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif.

I.3.3 Interprétation géométrique

1. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$. $\det_{\mathcal{B}_c}(u, v)$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur u, v.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, le déterminant est le volume orienté du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

Exercice 5
1. Soient A, B, C 3 points non alignés de $\mathbb{R}^2$. Exprimer à l'aide d'un déterminant l'aire du triangle ABC.
2. Rappelons que le volume d'un tétraèdre est $V = \frac{1}{3} B \times h$ où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante. Exprimer à l'aide d'un déterminant le volume du tétraèdre $ABCD$.
Rappel : le volume d'un parallélépipède est donné par $B \times h$ où B est l'aire de la base.

II Lieux géométriques

II.1 Droites

II.1.1 Généralités

Les droites (affines) de $\mathbb{R}^n$ sont les ensembles de la forme $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(u)$ où A est un point et u un vecteur directeur non nul. $D = \text{Vect}(u)$ est la direction de $\mathcal{D}$.

Cela revient à donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$. Par exemple dans le plan, $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ ssi $\exists t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = x_A + t x_u \\ y = y_A + t y_u \end{cases}$ avec des notations évidentes pour les coordonnées de A et u. Dans l'espace, on ajoute juste une troisième coordonnée.

II.1.2 Colinéarité

Avec les notations précédente, un point $M \in \mathbb{R}^n$ est un point de $\mathcal{D}$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et u sont colinéaires (penser au déterminant dans $\mathbb{R}^2$).

II.1.3 Cas de $\mathbb{R}^2$

Toute droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ possède une équation de la forme $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul **normal** à $\mathcal{D}$, ie orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$, ou encore orthogonal à tout vecteur de la direction de $\mathcal{D}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur de $\mathcal{D}$ (non nul !).

Exercice 6

1. Soit $\mathcal{D} : 2x - y + 1 = 0$. Donner deux points, un vecteur directeur et un vecteur normal de $\mathcal{D}$.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donner une équation, un vecteur directeur et un vecteur normal de $\mathcal{D} = (AB)$.
3. Donner une équation, un deuxième point et un vecteur normal de $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II.1.4 Savoir faire

Déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles.

Exercice 7

Soit $\mathcal{D} : 3x + 7y - 2 = 0$. Déterminer la distance de $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{D}$. Astuce : si $A, B \in \mathcal{D}$, on pourra calculer l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme.

II.1.5 Cas de $\mathbb{R}^3$

Les droites de l'espace ne possèdent PAS d'équation cartésienne. A la place, on peut les décrire comme intersection de deux plans.

II.2 Plan de $\mathbb{R}^3$

II.2.1 Définition

Un plan de $\mathbb{R}^3$ est un ensemble de la forme $\mathcal{P} = A + \text{Vect}(u, v)$ où A est un point et (u, v) est libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires). Sa direction est le sous-espace vectoriel de dimension 2 $\text{Vect}(u, v)$.

Ainsi un point M est un point de $\mathcal{P}$ ssi $(\overrightarrow{AM}, u, v)$ est liée (encore une fois, on pensera au déterminant).

II.2.2 Equation

Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$. Alors $\mathcal{P}$ possède une équation de la forme $\mathcal{P} : ax+by+cz+d = 0$ où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul, **normal** à $\mathcal{P}$.

Exercice 8

On pose $\mathcal{P} : x - 2y + z - 3 = 0$. Donner une base et un point de $\mathcal{P}$.

Exercice 9

Donner une équation de $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ainsi que 2 autres points de ce plan, de telle manière que la donnée des nos trois points détermine $\mathcal{P}$.

Exercice 10

On pose $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Trouver deux plans dont l'intersection est $\mathcal{D}$. On pourra les donner par des équations.

II.3 Cercles

II.3.1 Définition

Soit Ω un point d'un plan ($\mathbb{R}^2$ ou un plan de $\mathbb{R}^3$). Le cercle de centre Ω et de rayon $R \in]0, +\infty[$ est l'ensemble des points de ce plans à distance R de Ω.

II.3.2 Equation

Dans $\mathbb{R}^2$, tout cercle possède une équation de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ où $\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$ est le centre et R le rayon.

II.3.3 Tangentes

La tangente en un point M_0 du cercle $\mathcal{C}$ est la droite passant par M_0 et **orthogonale** à $\overrightarrow{\Omega M_0}$.

Exercice 11

Pour une droite $\mathcal{D}$ donnée, décrire le lieu des centres des cercles tangents à $\mathcal{D}$ en un point $M_0 \in \mathcal{D}$ fixé.

Exercice 12 (Théorème important)

Soient A, B deux points fixés et distincts du plan.

Décrire l'ensemble $E = \{M \in \mathbb{R}^2 | \ (\overrightarrow{AM} | \overrightarrow{BM}) = 0\}$.

Exercice 13

Décrire en fonction des rayons et des centres le nombre de points d'intersection de deux cercles du plan.

Exercice 14 (Adaptation à l'espace)

Dans un repère orthonormal direct on donne les points $A : (1, 2, 3)$, $B : (2, 3, 1)$, $C : (3, 1, 2)$, $D : (1, 0, -1)$.

1. Chercher le centre et le rayon de la sphère circonscrite à $ABCD$.
2. Chercher les équations cartésiennes des plans (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).

II.3.4 Equation de sphère

La sphère de centre $\Omega = \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \\ z_\Omega \end{pmatrix}$ et de rayon $R \geqslant 0$ est l'ensemble des points (de l'espace) à distance R de Ω et est d'équation

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega) = R^2$$

Exercice 15
Décrire l'intersection de deux sphères en fonction de leurs rayons et de la distance entre leurs centres.