Devoir maison 3

A rendre le au plus tard le 22/09/2020.

Exercice 1

On s'intéresse à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Pour $N \geqslant 1$ un entier, on note $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas absolument convergente.
2. Pour $N \geqslant 1$, on note $u_N = S_{2N}$ et $v_N = S_{2N-1}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
4. On pose maintenant, pour $n \geqslant 2$, $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
   (a) Montrer que $w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
   (b) Après factorisation du dénominateur, montrer que
   $$w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$
   (c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $a_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Que dire de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$?
   (d) Déduire des deux questions précédentes que $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$ diverge.

On voit ici que le résultat de cours : Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ à la même nature que $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ ne peut pas s'appliquer dans le cas général. Il faut absolument vérifier avant de l'appliquer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien positives (ou toujours négatives).

Indications :

1.
2. Attention à l'écriture de u_{N+1} et v_{N+1}. Gardez en tête ce que vous devez prouver.
3. Définition ?
4. (a)

   (b) La méthode est rappelée : pour utiliser les formules de DL en $1+u$ comme $\ln(1+u)$, $\frac{1}{1+u}$, $(1+u)^\alpha$ et lorsque l'expression n'est pas de la bonne forme (on a pas une forme $1+u$ avec $u \to 0$), on factorise par l'équivalent.

   (c)

   (d) Aller voir du côté de la proposition 2.