Devoir surveillé n°1

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Applications directes)

1. Étude d'une série
   (a) Justifier que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ converge et calculer sa somme.
   (b) Pour $N \in \mathbb{N}$, Calculer $r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ (le reste de rang N).
   (c) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} r_n$ converge et calculer sa somme.
2. Un peu de géométrie. On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (et on pourra confondre les points avec la colonne de leurs coordonnées, s'il le faut).
   (a) On considère trois points $A : \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, B : \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, C : \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$. Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en un point à préciser.
   (b) En déduire le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC, ainsi que son rayon et en donner une équation.
   (c) Donner une équation de la tangente T_A à $\mathcal{C}$ en A et une équation de T_B, la tangente à $\mathcal{C}$ en B.
   (d) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de T_A et T_B.
3. Un exercice théorique.
   (a) Soient deux suites $(u_n), (v_n)$ de réels. Montrer que $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n} \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   (b) Donner un exemple de suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ mais on a PAS $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$

Exercice 2 (Recherche d'équivalents classiques)

1. Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. D'après le cours, $H_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. On cherche un équivalent de H_n.
   (a) Montrer que $\forall x > -1 \ \ln(1+x) \leqslant x$. Illustrer graphiquement ce résultat (en plus de la preuve).
   (b) En déduire que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
   (c) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$
   (d) Donner un équivalent de H_n.
2. Cette fois on cherche un développement de $\ln(n!)$.
   (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \ \ln(n!) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Montrer que $\int\limits_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k) \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$. On donnera, en plus de la preuve, une illustration graphique de ce résultat.
   (c) En déduire que, pour $n \geqslant 2$, on a $n\ln(n) - n + 1 \leqslant \ln(n!) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1$.
   (d) Montrer que $(n+1)\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$ puis donner un équivalent de $\ln(n!)$.
   (e) En reprenant le résultat de 2c, montrer que $\ln(n!) = n\ln(n) - n + o_{+\infty}(n)$.

Exercice 3

Le but : quelques manipulations sur les polynômes ainsi qu'une solution au fameux problème de Bâle.

Dans tout l'exercice, sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

Partie I, un peu de trigonométrie

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

1. Rappeler la formule pour $\cos(a+b)$ lorsque $a, b \in \mathbb{R}$
2. Rappeler l'expression de $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
3. En déduire l'expression de $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$

Partie II, polynômes de Tchebychev

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ T_{k+1}(X) = 2XT_k(X) - T_{k-1}(X).$$

On commence par étudier quelques propriétés simples de ces polynômes.

1. Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.
2. Calculer le degré de T_n et son coefficient dominant que l'on notera $c(T_n)$.
3. On pose $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & T_n(x) \end{array} \right.$ la fonction polynomiale associée à T_n. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$.
   On en déduit que f_n est une fonction paire lorsque l'entier n est pair et f_n est impaire lorsque n est impair.
4. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$ en fonction de n.
5. On note, pour cette question, m le degré de T_n et on suppose $n \geqslant 1$. Justifier rapidement que le coefficient de X^{m-1} dans T_n est nul.

Partie III

On va chercher les racines de ces polynômes.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n vérifie
$$\forall \theta \in \mathbb{R}\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
2. Montrer que $T_n'(1) = n^2$. On pourra dériver la relation $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ par rapport à θ puis faire tendre θ vers 0.
3. Dans cette question uniquement, on suppose que l'entier n est non nul.
   (a) A quelle condition sur $\theta \in \mathbb{R}$ a-t-on $T_n(\cos\theta) = 0$?
   (b) Montrer (proprement) que les nombres de la forme $\lambda_p = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{p\pi}{n}\right)$ avec $p \in [\![0, n-1]\!]$ sont tous distincts.
   (c) Montrer que T_n possède n racines distinctes dans $[-1, 1]$
4. On déduit que la question précédente que T_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont simples. Alors on peut écrire, pour $n > 0$,
$$T_n(X) = 2^{n-1}\prod_{p=0}^{n-1}(X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{p\pi}{n}\right))$$
   A quoi correspond le facteur 2^{n-1} ?

Partie IV, sur les épaules des géants.

On cherche ici la valeur de la somme d'un série notoirement convergente, $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$. Notons $\ell = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. On désignera par S_n la n-ième somme partielle de cette série, ie. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Exprimer pour tout n, le nombre S_{2n} en fonction de S_n et I_n uniquement.
2. En déduire que $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge vers $\ell' = \frac{3}{4}\ell$.
3. On fixe $n > 0$ et on prend x dans un intervalle contenant 1 et où $T_n(x) > 0$. Rappelons que l'on a noté $\lambda_p = \cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{2n}\right)$ pour $p \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que $\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \frac{1}{x - \lambda_p}$.
4. Calculer $\sum\limits_{p=0}^{n-1} \frac{1}{1-\cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{2n}\right)}$. Indication : on doit trouver n^2, en utilisant les parties précédentes.
5. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ et pour θ convenable (à préciser), $\frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1$.
6. En déduire les valeurs de $\sum\limits_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2p+1)\pi}{4n}\right)}$ et $\sum\limits_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2p+1)\pi}{4n}\right)}$
7. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.

(b) En déduire un encadrement de la somme $\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{(2p+1)\pi}{4n}\right)^2}$ puis que

$$\frac{\pi^2(2n-1)}{16n} \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi^2}{8}$$

(c) Calculer ℓ' et montrer que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.