

Calcul de rayon

Exercice 1

On considère une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ d'une variable réelle x . On note R son rayon de convergence.

1. Si on suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n 2^n$ est convergente, que dire de R ?
2. Si on suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n 2^n$ est divergente, que dire de R ?
3. Si on suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n 3^n$ converge, mais ne converge pas absolument, que dire de R ?

Exercice 2

Calculer le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ lorsque :

- a) $a_n = 2 + ni$ b) $a_n = \frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n}$ c) $a_{2n} = 2^n$ et $a_{2n+1} = 0$ d) $a_n = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{n}} \right)^n$
- e) $a_n = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ f) $a_n = n^{\ln(n)}$

Exercice 3

Déterminer le rayon et le domaine de convergence de chacune des séries entières suivantes :

- a) $\sum_{n \geq 0} n! z^n$ b) $\sum_{n \geq 0} n! z^{n^2}$ c) $\sum_{n \geq 0} z^{n!}$

Calcul de somme

Exercice 4

1. Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)x^n.$$

INDICATION : on pourra décomposer le facteur de x^n selon la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \dots)$

2. Mêmes questions lorsque $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} x^n$.

Exercice 5

Prouver la convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 0} (n+1)p(1-p)^n$, $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$ où $p \in]0, 1[$.

Exercice 6

Soit $a \geq 0$. Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \operatorname{ch}(na)x^n$, $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(na)x^n}{n!}$

Exercice 7

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

- a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{3n}}{n+1}$ b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{(2n)!}$ c) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n+2}{n+1} x^n$ d) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n! \times (2n+1) \times (2n-1) \times \dots \times 3 \times 1}$.

Développements

Exercice 8

Montrer que $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x}$ se prolonge sur \mathbb{R} en une fonction \mathcal{C}^∞ .

Exercice 9

Donner le développement en série entière (DSE) au voisinage de 0 ($x \in \mathbb{R}$) des fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence de la série entière obtenue :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{2+x}$
2. $f_2 : x \mapsto \ln(4-x^2)$.
3. $f_3 : x \mapsto \ln(x^2 + 5x + 4)$.
4. $f_4 : x \mapsto e^x \sin(x)$
5. $f_5 : x \mapsto \operatorname{sh}(x) \cos(x)$.
6. $f_6 : x \mapsto \int_x^1 \frac{\cos(t)-1}{t} dt$.

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on étudie la série entière $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R = 1$. On pourra encadrer S_n .
2. Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n$. Montrer que pour $x \in]-1, 1[$ on a $(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
3. En déduire une expression simple de f .

Exercice 11

Développer en série entière de la fonction de la variable réelle f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x \cos(\alpha) + 1}$$

On précisera l'ensemble de définition de f et on discutera selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

INDICATION : on pourra écrire $1 - 2x \cos(\alpha) + x^2 = (x - e^{i\alpha})(x - e^{-i\alpha})$ et chercher a, b tels que $f(x) = \frac{a}{x - e^{i\alpha}} + \frac{b}{x - e^{-i\alpha}}$.

Exercice 12

1. Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de la fonction f d'une variable réelle définie

$$\text{par } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(2n+1)}$$

2. Calculer la dérivée seconde de $x \mapsto x^2 f(x^2)$ pour x appartenant à l'intérieur de D .

3. En déduire une expression simple de $f(x)$ pour tout $x \in D$.