

Devoir maison 5

A rendre le au plus tard le 13/10/2020.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ainsi que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto AM - MA \end{cases}$.

1. Étude de $\ker(\varphi)$

- (a) Montrer que φ est une application linéaire.
- (b) Préciser la base canonique \mathcal{B}_c de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et calculer $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi)$.
- (c) Quel est le rang de φ ?
- (d) Calculer $\ker(C)$ (l'ensemble des solutions du système homogène associé à C), puis $\ker(\varphi)$ (l'ensemble des matrices correspondantes).
Que vérifient les matrices de $\ker(\varphi)$ par rapport à A ?

2. On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'application canonique associée à A , ie $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ X & \mapsto AX \end{cases}$.

- (a) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^2 et calculer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
- (b) On note $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de \mathcal{B}_2 (la base canonique de \mathbb{R}^2) à \mathcal{B} . Préciser P ainsi que le lien entre A, D, P et P^{-1} .
- (c) Trouver les matrices $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $DM = MD$.
- (d) Montrer que pour une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = 0 \iff D$ commute avec $P^{-1}MP$.
- (e) En déduire une base de $\ker(\varphi)$ (sans utiliser la question 1...)

Indications :

1. (a)
 - (b) Voir le cours
 - (c) C'est également le rang d'une matrice...
 - (d) On sait écrire une colonne correspondant à une matrice pour écrire la matrice de φ . Il s'agit ici d'écrire des matrices correspondant à des colonnes.
2. (a) Attention à bien exprimer $f(u)$ et $f(v)$ en fonction de u et v
 - (b) Cours. Attention aux bases : l'une est l'ancienne, l'autre la nouvelle.
 - (c) On obtient un système à 4 inconnues.
 - (d) Preuve "théorique". On suppose un côté pour prouver l'autre, puis ensuite....
 - (e)