Devoir maison 6

A rendre le au plus tard le 03/11/2020.

Exercice 1

Pour $n \geqslant 2$ entier, on pose

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 2} a_n x^n$.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ on a
$$\int_2^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
3. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} a_n R^n$ diverge.
4. Soit $x \in]-R, R[$. On pose
$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$$
   (a) Calculer $(1-x)S'(x)$ pour tout réel $x \in]-R, R[$.

   (b) En déduire une expression explicite de $S(x)$ lorsque $x \in]-R, R[$.
5. Question bonus

   (a) En utilisant la méthode du DM 3 (questions 2 et 3), montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} a_n(-R)^n$ converge.

   (b) Déterminer la limite de S en $-R$ et intuiter la valeur de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

   Ceci reste une intuition car notre cours sur la continuité et dérivabilité des sommes de séries entières n'est valable que sur $]-R, R[$ et nous n'avons aucun résultat en $-R$ pour lier la somme de notre dernière série et la fonction S.

Indications :

1. On pourra noter $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
2. Nous avons déjà traité cette question plusieurs fois. Reste à retrouver où.
3. La méthode classique s'applique.
4. (a) Simplifier $(1-x)S'(x)$ pour reconnaître une série entière usuelle.
   (b) Il s'agit d'un calcul de primitive.
5. Question bonus
   (a) Poser S_N, u_N et v_N puis montrer que (u_N) et (v_N) sont adjacentes.
   (b) Un théorème hors programme prouve notre intuition : le théorème de convergence radial d'Abel.