Table des matières

I Bases en dimension quelconques

I.1 Familles libres

I.1.1 Rappel

Si E est un $\mathbb{K}$-ev, une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est dite libre ssi

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}.$$

La seule manière d'obtenir le vecteur nul par combinaison linéaire des u_k est la combinaison triviale.

Proposition 1
Soit E un espace vectoriel de dimension n.
— une famille qui contient le vecteur nul est liée.
— une famille libre possède au plus n vecteurs.
— une famille libre possédant n vecteurs est une base de E.
— on ne modifie pas le caractère libre en effectuant une opération élémentaire sur les vecteurs d'une famille.
— une famille est libre ssi chacun de ses vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des autres.

I.1.2 Familles infinies

On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Les familles suivantes sont des familles infinies.

1. $(x \mapsto \sin(nx))_{n \in \mathbb{Z}}$.
2. $(x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{C}}$.

Il s'agit de se donner un ensemble d'élément repérés par un indice. Pour le deuxième exemple, on a associé une fonction à chaque nombre complexe.

Définition 1
Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque et X un ensemble (quelconque lui aussi). Soit $(u_i)_{i \in X}$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est dite libre ssi pour tout $I \subset X$ ensemble **fini**, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.

D'une manière équivalente, aucun des u_i n'est une combinaison linéaire (finie, évidemment...) des autres u_j.

Exemple 1
Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots) = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre. Preuve : unicité des coefficients d'un polynôme.

Exemple 2
Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille $(\cos(n.))_{n \in \mathbb{N}}$. est libre. Montrons par récurrence que $(\cos(n.))_{i \in [\![0,k]\!]}$ est libre, sachant que le cas $k = 0$ est trivial.

Supposons que $(\cos(n.))_{n \in [\![0,k]\!]}$ est libre et soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R} \sum_{n=0}^{k+1} \lambda_n \cos(nx) = 0$ (1).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dérive deux fois la relation précédente : $\sum_{n=0}^{k+1} -n^2 \lambda_n \cos(nx) = 0$ (2)

Si on calcule $(k+1)^2(1) + (2)$ on obtient $\sum_{n=0}^{k} \lambda_n((k+1)^2 - n^2) \cos(nx) = 0$ (les derniers termes s'annulent). Par hypothèse de récurrence, $\lambda_n((k+1)^2 - n^2) = 0$ pour tout $n \in [\![0, k]\!]$ ie $\lambda_n = 0$.

Finalement, en reprenant (1), $\lambda_{n+1} = 0$ car $\cos((n+1).)$ n'est pas la fonction nulle.

Exemple 3
Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}\ \deg(P_k) = k$. Alors cette famille est libre.

En effet, si $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$ pour un entier n et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors le coefficient dominant de la somme est $\lambda_n \times$ le coefficient dominant de P_n. Donc $\lambda_n = 0$.

Ceci constitue l'hérédité d'une récurrence qui est trivialement initialisée (un polynôme de degré nul est un polynôme constant non nul donc constitue une famille libre à 1 élément).

Proposition 2
Toute famille de polynômes tous non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.

I.2 Familles génératrices

Proposition 3
Soit E un espace de dimension n et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$ une famille.

- — si $\mathcal{F}$ est génératrice de E alors $p \geqslant n$.
- — on peut avoir $p > n$ sans que $\mathcal{F}$ soit génératrice de E
- — si $p = n$ et que $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
- — si $e_p \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$ alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$
- — on ne modifie pas l'espace engendré en faisant subir une opération élémentaire à la famille $\mathcal{F}$.

Exemple 4
Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \ 2x + y - z + t = 0 \text{ et } x - 3y + t = 0\}$ est un espace vectoriel et en donner une famille génératrice.

Définition-Proposition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$. L'ensemble des sous-espaces de E qui contiennent A possède un minimum pour l'inclusion. Cet espace est noté $\mathrm{Vect}(A)$ et est appelé espace vectoriel engendré par A.

On peut le décrire comme l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de A.

Preuve.
Notons $\Omega = \{F \subset E| \ A \subset F \text{ et } F \text{ est un sev de E}\}$. Alors $\Omega \neq \emptyset$ car $E \in \Omega$.

Posons $G = \bigcup\limits_{F \in \Omega} F$ l'intersection de tous les éléments de Ω. Clairement (par construction), $A \subset G$.

Alors $0_E \in G$ car 0_E est un élément de tout sous espace de E. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in G$ alors x et y sont élément de tout $F \in \Omega$ et donc $\lambda x + \mu y$ est élément de tout $F \in \Omega$. Ainsi $\lambda x + \mu y \in G$ et G est bien un sous-espace de E.

SI maintenant on considère F un sous espace de E qui contient A alors $F \in \Omega$ et par construction $G \subset F$, ce qui prouve que G est bien le minimum de Ω pour l'inclusion.

Finalement, toute combinaison linéaire d'éléments de A est dans G par stabilité, et l'ensemble des combinaisons d'éléments de A est un sev de E (cf cours de sup).■

Définition 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X un ensemble et $(e_i)_{i \in X}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(e_i)_{i \in X}$ est génératrice de E ssi pour tout $u \in E$ on peut trouver un ensemble **fini** $I \subset X$ et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires tels que $u = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i e_i$.

Ainsi tout élément de E est une combinaison linéaire (la somme est finie) d'éléments de $(e_i)_{i \in X}$ et on a $E = \mathrm{Vect}((e_i)_{i \in X})$.

Exemple 5
$(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 6
Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes vérifiant $\forall k \in \mathbb{N} \ \deg(P_k) = k$. Montrons que cette famille est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_0, \dots, P_n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$ donc engendre $\mathbb{K}_n[X]$ qui est de dimension $n + 1$. Comme tout polynôme non nul possède un degré n, il est combinaison linéaire des $n + 1$ premier P_k, ce qui prouve le caractère générateur.

Un exemple de telle base est la famille $((X - a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour un $a \in \mathbb{K}$ fixé. Les coordonnées d'un polynôme P sont alors les $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$ d'après le théorème de Taylor.

I.3 Bases

Définition 3
Soit X un ensemble et E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in X}$ est une base de E ssi $(e_i)_{i \in X}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Dans ce cas, pour tout $u \in E$ il existe un unique ensemble fini $I \subset X$ et une unique famille de scalaires $(x_i)_{i \in I}$ (appelée coordonnées de u dans $\mathcal{B}$) tels que $u = \sum\limits_{i \in I} x_i e_i$.

Proposition 4
$\mathcal{B} = (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée base canonique.

I.3.1 Remarque

De manière plus générale, si on choisit $P_k \in \mathbb{K}[X]$ de degré k pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

II Equation(s) d'un sous-espace

II.1 Hyperplans

Définition 4
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace H de E est appelé hyperplan ssi H admet une droite comme supplémentaire. Cette définition est valable même en dimension infinie.

Proposition 5
Les hyperplan de E de dimension $n > 0$ sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Exemple 7
Les droites du plan, les plans dans l'espace. Remarquer les équations cartésiennes similaires dans ces cas.

Proposition 6
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un hyperplan de E.

Alors H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et si $H = \ker(g)$ pour $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ alors f et g sont proportionnelles.

Preuve.
Soit $\mathbb{K}u$ une droite supplémentaire de H dans E (ie. $u \notin H$). Pour $x \in E$ on peut alors écrire $x = x_H + \lambda_x u$ de manière unique. On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda_x \end{array} \right.$. On prouve très facilement (voir les projecteurs) que f est une forme linéaire, non nulle car $f(u) = 1$.

De plus, pour $x \in E$, $f(x) = 0 \iff \lambda_x = 0 \iff x \in H$. Ainsi $H = \ker(f)$.

Supposons maintenant que $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ vérifie $\ker(g) = H$. Alors g est une forme linéaire non nulle (sinon son noyau est E) et on a avec les notations précédentes, $g(x) = g(x_H) + \lambda_x g(u) = \lambda_x g(u) = g(u) f(x)$. Ainsi $g = \underbrace{g(u)}_{\in \mathbb{K}} \times f$.

Exo : on peut en fait décrire g de la même manière que f ($g : x \mapsto \mu_x$). Avec quel(s) vecteur(s) ? ∎

Théorème 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E.

Pour un hyperplan H il existe $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ non nul tel qu'une équation de H dans la base $\mathcal{B}$ soit $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ ce qui signifie que $x \in E$ de coordonnées (dans $\mathcal{B}$) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ appartient à H ssi $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.

Toutes les équations de H (dans la base $\mathcal{B}$) sont proportionnelles à celle-ci.

Preuve.
Posons $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \ker(f)$. Alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff f(x) = 0 \iff f(e_1)x_1 + f(e_2)x_2 + \cdots + f(e_n)x_n = 0$. En notant $a_i = f(e_i)$ il ne reste qu'à vérifier que ces scalaires sont non tous nuls. S'ils l'étaient, f serait l'application nulle car son image est engendrée par $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

on a bien trouvé une équation (à coefficients non tous nuls) de H dans la base $\mathcal{B}$. Toutes les autres équations de H sont de la forme $g(x) = 0$ où g est une forme linéaire, donc sont proportionnelles (l'application $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ est linéaire pour toute famille $(\beta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ par composition). ∎

Exemple 8
Dans $E = \mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble $F = \{P \in E |\ P(1) = 0\}$ est un hyperplan. En effet, un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est dans F ssi $a_0 + \cdots + a_n = 0$ (équation dont les inconnues sont les coordonnées dans la base canonique et les coefficients tous égaux à 1).

II.2 Sous-espace en dimension finie

II.2.1 Intersection d'hyperplans

Soient $H_1, \ldots H_p$ des hyperplans de E de dimension $n \geqslant p$ et $\mathcal{B}$ une base de E. L'intersection $H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_p$ est l'ensemble des solutions d'un système S à n inconnues (les coordonnées dans $\mathcal{B}$) et p équations. Le rang de S est au maximum p donc l'ensemble des solutions (notre intersection) est de dimension au moins $n - p$.

Quel est le cas d'égalité pour les dimensions ?

Théorème 2
Soit E de dimension $n > 0$ et $p \leqslant n$.

1. l'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n - p$.
2. réciproquement, tout sous-espace de dimension p est l'intersection de $n - p$ hyperplans (et possède donc un système d'équation à $n - p$ équations et n inconnues dans une base fixée de E).

Preuve.
Il nous reste à prouver le deuxième point.

Soit F un sous-espace de E de dimension p. Notons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et complétons cette base en $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $x \in E$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. Alors $x \in F \iff x_{p+1} = 0$ et $\ldots$ et $x_n = 0$.

Si on note $H_i : x_i = 0$ pour $i \in [\![p+1, n]\!]$ des hyperplans décrits par leurs équations dans $\mathcal{B}$, alors $F = \bigcap_{i=p+1}^{n} H_i$. On obtient bien $n - p$ hyperplans ie. $n - p$ équations. ∎

Exemple 9
On savait qu'une droite dans l'espace est décrite par un système de deux équations, c'est à dire comme l'intersection de deux plans.

Exercice 1
Trouver un système d'équation de la droite $D = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.