Table des matières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels

I.1 Sous-espaces et dimension

I.1.1 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On dit que E est de dimension finie ssi E possède une famille génératrice finie $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ c'est à dire que chaque élément de $x \in E$ peut s'écrire sous la forme $x = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$ où les λ_k sont des scalaires.
2. Dans le cas où E est de dimension finie, E possède au moins une base et toutes les bases de E ont le même cardinal que l'on appelle la **dimension** de E et que l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou plus simplement $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathbb{K}$

I.1.2 Exemple

1. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$, une base est (1)
2. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ et la base canonique est $(1, i)$.
3. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.
4. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$
5. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$
6. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}_n[X]) = 2n + 2$

I.1.3 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de E.

1. F est de dimension fini et $\dim(F) \leqslant n$
2. $F = E$ ssi $\dim(F) = n$

I.1.4 Exemple
On se sert très souvent de la deuxième partie de cette propriété pour prouver l'égalité de deux espaces.

Considérons par exemple le plan $P : x + y + z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$. On vérifie aisément que $u = (1, -1, 0)$ et $v = (1, 0, -1)$ sont des éléments de P et donc $\text{Vect}(u, v) \subset P$. De plus, $\text{Vect}(u, v)$ est de dimension 2, tout comme P car (u, v) est libre. Donc $P = \text{Vect}(u, v)$ (et on a en fait trouvé une base de P).

I.1.5 Une formule de dimension

$$\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$$

I.2 Supplémentaires

I.2.1 Définition
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. La somme de F et G est $F+G = \{x_F + x_G |\ x_F \in F \text{ et } x_G \in G\}$. C'est un espace vectoriel et on a même $F+G = \text{Vect}(F \cup G)$.

I.2.2 Exemple
Dans $\mathbb{R}^2$, la somme de deux droites vectorielles non confondues est $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^3$ la somme d'un plan et d'une droite non contenue dans ce plan est $\mathbb{R}^3$.

I.2.3 Famille génératrice

Si on dispose d'une famille (u_i) génératrice de F et d'une famille (v_i) génératrice de G, alors la concaténation de ces familles engendre $F + G$.

Ainsi, en dimension finie, $\dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

I.2.4 Exemple
Donner une base de $P_1 + P_2$ où $P_1 : x - y + 2z = 0$ et $P_2 = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

I.2.5 Définition
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. On dit que F et G sont supplémentaires dans E et on note $E = F \oplus G$ ssi

$$\forall x \in E\ \exists!\ (x_F, x_G) \in F \times G\ x = x_F + x_G$$

Avec ces notations, x_F est appelé le projeté de x sur F dans la direction G (ou parallèlement à G) et x_G le projeté de x sur G dans la direction F.

I.2.6 Caractérisation

On a également $E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$.

I.2.7 Exemple
1. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et la décomposition associée est $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$. Ainsi la projection d'une matrice A sur l'ensemble des matrices symétrique, dans la direction de l'ensemble des matrices anti-symétriques est $\frac{A+{}^tA}{2}$.
2. Notons $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ f \text{ est paire}\}$ et $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ f \text{ est impaire}\}$. Alors $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$, les projections d'une fonction f sur F et G étant respectivement $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

I.2.8 Théorème (Théorème de la base adaptée)
Soit E un espace de dimension fini et F, G des sous-espaces de E.

$E = F \oplus G$ ssi la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E. On dit que la base obtenue (par concaténation) est **adaptée** à la somme $F \oplus G$.

On a alors évidemment

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Dans ce cadre, déterminer les projections se ramène au calcul de coordonnées dans une base adaptée.

I.2.9 Corollaire
En dimension finie, tout sous-espace possède au moins un supplémentaire.

I.2.10 Théorème (Théorème de)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces de dimensions finies ; Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

I.2.11 Corollaire
Dans un espace de dimension finie, on a $E = F \oplus G \iff \begin{cases} F + G = E \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases} \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$.

I.2.12 Exercice
Caractériser (donner une ou des CNS sur) les espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$.

I.3 Hyperplans

I.3.1 Définition
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace H de E est appelé hyperplan ssi H admet une droite comme supplémentaire. Cette définition est valable même en dimension infinie.

I.3.2 Proposition
Les hyperplan de E de dimension $n > 0$ sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

I.3.3 Exemple
Les droites du plan, les plans dans l'espace. Remarquer les équations cartésiennes similaires dans ces cas.

I.3.4 Hyperplans et équations

Si on considère un système à 1 équation et n inconnues (équation non triviale) alors l'ensemble des solutions est un hyperplan.

Par exemple, $F = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]; P(2) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (les n inconnues sont ici les coefficients de d'un polynôme P).

I.4 Sommes directes d'espaces vectoriels

I.4.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1 \dots F_p$ des sous espaces de E.

1. La somme des espaces $(F_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i = \{u_1 + \cdots + u_p |\ u_1 \in F_1 \text{ et } u_2 \in F_2 \text{ et } \dots \text{ et } u_p \in F_p\}$. C'est le sous espace de E engendré par les F_i
2. On dit que la somme $F = \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est **directe** et on note $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$ ssi tout vecteur $u \in F$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $u = u_1 + \cdots + u_p$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!] u_i \in F_i$.

La somme et la somme directe sont associatives, ce qui permet de justifier a posteriori l'utilisation de $\sum$ et $\bigoplus$

I.4.2 Remarque

Le cas $p = 2$ est déjà connu. La somme $F + G$ est directe ssi F et G sont supplémentaires dans $F + G$.

I.4.3 Exercice

Trouver 3 espaces D_1, D_2, D_3 tels que $\mathbb{R}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$.

I.4.4 Théorème

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E. La somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe ssi

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^{p} F_i\ u_1 + \cdots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_E.$$

Ainsi il suffit de vérifier que le vecteur nul possède une unique écriture sous forme de somme.

Preuve.

Si on suppose la somme directe, alors le vecteur nul s'écrit de manière unique comme $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_p}$.

Réciproquement, supposons que $\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod\limits_{i=1}^{p} F_i\ u_1 + \cdots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_E$. Soit $u \in \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$. Montrons que sa décomposition en somme est unique.

Si on a $u = \sum\limits_{i=1}^{p} u_i = \sum\limits_{i=1}^{p} u'_i$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!] u_i, u'_i \in F_i$ alors $\sum\limits_{i=1}^{p} \underbrace{(u_i - u'_i)}_{\in F_i} = u - u = 0_E$ et donc $u_i - u'_i = 0_E$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ par hypothèse. ■

I.4.5 Exemple

Montrer que si $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E alors $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}(e_i)$.

I.4.6 Définition-Proposition

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E, de dimensions finies. Notons $F = \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$.

$F = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$ ssi la concaténation de bases des F_i est une base de F.

Une telle base de F est dite **adaptée** à la somme directe.

I.4.7 Remarque

1. Observer le ssi, et surtout la réciproque. Il est facile de décomposer un espace en somme si on en connaît une base. Par exemple $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}(1) \oplus \mathrm{Vect}(X, X^2) \oplus \mathrm{Vect}(X^3)$.
2. On obtient immédiatement $\dim\left(\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

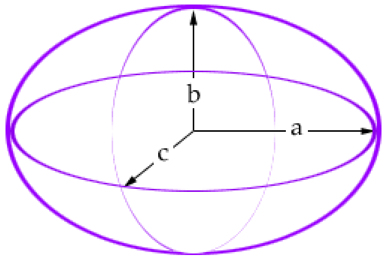
I.4.8 5/2

Quels genre de sous-espaces sont forcément en somme directe ?

I.4.9 Une application

Considérons la surface suivante, image d'une sphère par une application linéaire f simple : On a ici 3 droites (2 à 2 orthogonales d'ailleurs) D_a, D_b et D_c telles que sur chaque droite l'application f est une homothétie de rapport a, b ou c.

Comme $D_a \oplus D_b \oplus D_c = \mathbb{R}^3$, dans une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette somme directe, la matrice de f est :



II Applications linéaires

II.1 Propriétés générales

II.1.1 Définition

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est linéaire ssi

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall x, y \in E \; f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

On a alors $f(0_E) = 0_F$.

Si $F = \mathbb{K}$ on dit que f est une **forme linéaire**. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

II.1.2 Exemple

Quelques exemples important (avec des notations évidentes) : $f \mapsto f', f \mapsto \int_a^b f, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n, P \mapsto P(X+1), P \mapsto P(a)$ (avec un $a \in \mathbb{K}$ fixé).

D'autres plus géométriques : les projection (orthogonales ou non) et symétries, les rotations du plan et de l'espace.

II.1.3 Application canoniquement associée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A est $f : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{cases}$ et la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de f est la matrice A.

II.1.4 Équation linéaire

On dit d'une équation qu'elle est linéaire ssi elle est de la forme $f(x) = b$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire, $b \in F$ est fixé et l'inconnue est x, un élément de E.

Par exemple :

— $\forall x \in \mathbb{R}\; y''(x) + 3y'(x) + xy(x) = \cos(x)$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une équation linéaire et ici $f : y \mapsto y'' + 3y'' - Id \times y$ et $b = \cos$. On prouve facilement que f est linéaire.

— le système de matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et second membre $B \in K^n$ peut s'écrire $AX = B$ où l'inconnue est $X \in \mathbb{K}^p$ est également une équation linéaire. Cette fois l'application linéaire est l'application canoniquement associée à A.

Dans tous les cas si on dispose d'une solution particulière x_p qui vérifie donc $f(x_p) = b$ on peut écrire

$$f(x) = b \iff f(x) = f(x_p) \iff f(x - x_p) = 0 \iff x - x_p \in \ker(f) \iff x \in x_p + \ker(f)$$

et donc toute solution de $f(x) = 0$ est de la forme $x_p + x_H$ où x_p est une solution particulière et x_H une solution de l'équation homogène associée.

II.1.5 Proposition

1. $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension $\dim(E) \times \dim(F)$ quand E, F sont de dimensions finies).
2. Quand elle existe, la composée de deux applications linéaire est linéaire.
3. Quand elle existe, la bijection réciproque d'une application linéaire est linéaire.

II.1.6 Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Son noyau est $\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E |\; f(x) = 0_F\}$ et son image est $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F |\; \exists x \in E\; y = f(x)\}$.

II.1.7 Exemple

Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $\ker(f)$.

II.1.8 Proposition

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, G un sous-espace de E et H un sous-espace de F.

Alors $f(G)$ et $f^{-1}(H)$ sont des sous-espaces de F et E respectivement. En particulier $\ker(f)$ est un sous-espace de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace de F.

Preuve.

— Montrons que $f(G)$ est un sous espace de F.

Soient donc $x, y \in f(G)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in f(G)$.

Or $x, y \in f(G)$ donc on peut poser $u, v \in G$ tels que $x = f(u)$ et $y = f(v)$. Alors, par linéarité, $\lambda x + \mu y = f(\lambda u + \mu G) \in f(G)$ car $\lambda u + \mu v \in G$ (c'est un espace vectoriel).

— Montrons que $f^{-1}(H)$ est un sous-espace de E. Soient $x, y \in f^{-1}(H)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $f(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{f(x)}_{\in H} + \mu \underbrace{f(y)}_{\in H} \in H$ car H est un sous-espace de F donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(H)$ ■

II.1.9 Rappels

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$ (valable même si f n'est pas linéaire).
3. Si $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
4. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, f est bijective (isomorphisme) ssi $(f(e_1), \dots f(e_n))$ est une base de F.

II.2 Applications linéaires et dimension

II.2.1 Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit H un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. $f_H : H \to \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme.

Preuve.
On a $f_{|H} : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & \mathrm{Im}\, f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ et $H \oplus \ker(f) = E$. Il s'agit bien d'une application linéaire de $\mathcal{L}(H, \mathrm{Im}\, f)$.

— $\ker f_{|H} = \{x \in H |\ f(x) = 0\} = H \cap \ker f = \{0_E\}$ car H et $\ker f$ sont en somme directe.

— Soit $y \in \mathrm{Im}\, f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or on peut écrire $x = x_H + x_K$ avec $x_H \in H$ et $x_K \in \ker f$. Ainsi $f(x) = f(x_H) + f(x_K) = f(x_H) + 0_E$ et donc $y = f(x_H) = f_{|H}(x_H)$. Donc $\mathrm{Im}\, f_{|H} = \mathrm{Im}\, f$.

Finalement $f_{|H}$ est bien un isomorphisme linéaire. ■

II.2.2 Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et supposons E de dimension finie. Alors $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

II.2.3 Exemple
Si E est de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est une forme linéaire non nulle, alors $\dim(\ker(f)) = n - 1$.

II.2.4 Corollaire
Soit E, F des espaces de **même** dimension et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Dans le cas où f est un endomorphisme, les dimensions de E et F sont évidemment égales et ce résultat s'applique.

II.2.5 Exemple (Polynômes interpolateur de Lagrange)
Soient $a_0, \dots a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts.

L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est injective (compter les racines d'un polynôme du noyau, seul le polynôme nul en possède autant) et donc bijective.

En conséquence, si on fixe $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ (quelconques cette fois), il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!]\ P(a_i) = y_i$, ou encore par $n+1$ points d'abscisses 2 à 2 distinctes il passe une unique courbe polynomiale de degré n ou moins.

Pour déterminer P, on calcule les P_i tels que $\varphi(P_i) = e_i$ le $i$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Un raisonnement rapide sur les racines (2 à 2 distinctes) de P_i montre que $P_i = \alpha_i \prod\limits_{\substack{j=0 \\ \neq i}}^{n} (X - a_j)$ et comme $P_i(a_i) = 1$ on trouve la valeur de α_i.

Ensuite, la linéarité de φ montre que $\varphi(\sum\limits_{i=0}^{n} y_i P_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i e_i$ et donc $P = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i P_i$.

II.2.6 Corollaire
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie.

$$f \in GL(E) \iff \exists g \in \mathcal{L}(E)\ f \circ g = Id_E \iff \exists g \in \mathcal{L}(E)\ g \circ f = Id_E$$

II.2.7 Exemple
Soit f un endomorphisme vérifiant $f^2 - 3f - Id = 0$. Montrer que f est un automorphisme et exprimer f^{-1}.

II.2.8 Remarque

C'est le pendant du théorème qui énonce qu'une matrice est inversible ssi on trouve un inverse à gauche ou un inverse à droite.

II.3 Espaces stables

II.3.1 Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. On dit que F est stable par f ssi $f(F) \subset F$.

II.3.2 Exemple

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $F_\lambda = \ker(f - \lambda id_E)$ est stable par f.

II.3.3 Restriction

Si F est stable par f alors on peut définir $f_{|F} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ la restriction de f à F (le détail important ici est l'espace d'arrivé qui est illégal si F n'est pas stable).

Alors $f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$.

II.3.4 Familles génératrices

Soit $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. F est stable par f ssi $\forall j \in [\![1, p]\!] f(e_j) \in F$. En effet $f(F) = \text{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

II.3.5 Exemple

Considérons l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$. On pose $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $F = \text{Vect}(u, v)$ et $G = \text{Vect}(w)$.

Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que F, G sont stables par f, calculer $\text{Mat}_{(u,v)}(f_F), \text{Mat}_{(v)}(f_G)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

II.3.6 Théorème

Soit F un sous-espace de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E. On note $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$

F est stable par f ssi $\text{Mat}_B(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où

- $A \in M_p(\mathbb{K})$ (et on a alors $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f_{|F})$)
- $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$
- $C \in M_{n-p}(\mathbb{K})$
- 0 représente la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}$

Preuve.
On note $M = (m_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Supposons F stable par f et notons, $\mathcal{B} = e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ (les p premiers sont dans F). Pour $j \in [\![1, p]\!]$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i$. Les derniers termes de cette somme sont nuls car $e_j \in F$, ainsi $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} m_{ij} e_i$. Ceci prouve que les n - p dernières lignes de M sont nulles dans les p premières colonnes.

Réciproquement, si M est de la forme annoncée, alors $f(e_j)$ n'a des coordonnées que sur $e_1, \ldots, e_p$ ie est dans F, et ce pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. ∎

III Endomorphismes particuliers

III.1 Homothéties

III.1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. **L'homothétie** de rapport λ est l'application linéaire $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array} \right.$.

III.1.2 Exemple

Deux homothéties très importantes : l'application nulle et l'identité.

III.1.3 Matrice d'une homothétie

On considère E de dimension finie égale à n cette fois et on note h_λ l'homothétie de rapport λ. Alors dans toute base $\mathcal{B}$ de E, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$.

Matriciellement, la seule matrice semblable à λI_n est elle même, car pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$, on a $P^{-1} \lambda I_n P = P^{-1} P \lambda I_n = \lambda I_n$.

III.1.4 Commutation

Une homothétie commute avec tout endomorphisme.

III.2 Projecteurs, symétries

III.2.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. projecteur@Projecteur

L'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array} \right.$ est appelé projecteur sur F parallèlement à G (ou de direction G).

L'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$ est appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G).

III.2.2 Liens entre ces applications

1. On a les liens important entre ces applications : $s = 2p - Id$ et $p = \frac{s+Id}{2}$.
2. Si p' et s' désignent les projection et symétrie sur G et de direction F, on a $p + p' = Id, p \circ p' = 0 = p' \circ p, s + s' = 0, s \circ s' = s' \circ s = -Id.$.

III.2.3 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E

1. Soit p le projecteur sur F de direction G. On a alors :
   - $p \in \mathcal{L}(E)$
   - $p^2 = p$
   - $\ker p = G$
   - $\operatorname{Im} p = F = \ker(Id_E - p)$
2. Réciproquement si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$ alors f est le projecteur sur $\operatorname{Im}(f) = \ker(f - Id)$ dans la direction $\ker(f)$ (et on a donc $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$).

Preuve.

1. Prouvons tout d'abord la linéarité.

   Soient $x, y \in E$ que l'on décompose en $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

   Alors $p(\alpha x + \beta y) = p\big((\alpha x_F + \beta y_F) + (\alpha x_G + \beta y_G)\big) = \alpha x_F + \beta y_F = \alpha p(x) + \beta p(y)$ et p est bien linéaire.

   Evidemment, $p^2(x) = p(x_F + 0_E) = x_F = p(x)$ et on a bien $p^2 = p$.

   Ensuite, avec les mêmes notations, $p(x) = 0_E$ ssi $x_F = 0_E$ ssi $x \in G$. De plus, $p(x) = x_F \in F$ et on a en fait prouvé $\operatorname{Im}(f) \subset F$.

   Si $x \in F$, alors $p(x) = x \in \operatorname{Im}(f)$ et donc $F \subset \operatorname{Im}(p)$ et finalement $F = \operatorname{Im}(p)$.

   Il reste à prouver que $\operatorname{Im}(p) = \ker(p - Id_E)$. ON a déjà montré que tout $x \in F$ vérifie $p(x) - x = 0$ ie $(p - Id_E)(x) = 0$ et donc $F \subset \ker(p - Id_E)$. Soit maintenant $x \in \ker(p - Id_E)$ ie x vérifie $p(x) = x$. Ainsi $x \in \operatorname{Im}(p)$ et l'autre inclusion est prouvée.
2.
   - On a d'abord $(f - Id) \circ f = 0$ donc $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f - Id)$. L'autre inclusion est évidente (cf fin du point précédent).
   - Montrons maintenant que $\ker(f) \oplus \ker(f - Id) = E$. Soit $x \in E$.
     - Analyse : **Supposons** que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(f)$ et $x_2 \in \ker(f - Id)$.

       Alors $f(x) = 0_E + f(x_2) = x_2$. Ainsi $x_2 = f(x)$ et donc $x_1 = x - x_2 = x - f(x)$.
     - Synthèse : Réciproquement, posons $x_1 = x - f(x)$ et $x_2 = f(x)$. Montrons que $x = x_1 + x_2$ (trivial) et que $x_1 \in \ker(f)$ et $x_2 \in \ker(f - Id)$ (moins trivial).

       Cependant, $f(x_1) = f(x) - f^2(x) = 0_E$ et $(f - Id)(x_2) = f(x_2) - x_2 = f^2(x) - f(x) = 0_E$ car $f^2 = f$.

     Conclusion : $E = \ker(f) + \ker(f - Id)$. Le fait que la somme est directe provient directement de l'analyse (les seules valeurs possibles sont...) ou du fait que si $x \in \ker(f) \cap \ker(f - Id)$ alors $f(x) = 0_E$ et $f(x) - x = 0_E$ donc $x = 0_E$ et on a bien $\ker(f) \cap \ker(f - Id) = \{0_E\}$.
   - Par définition d'un projecteur, et d'après notre analyse, f est le projecteur sur $\ker(f - Id) = \operatorname{Im}(f)$ dans la direction $\ker(f)$. ∎

III.2.4 Exemple

Soit la matrice $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à A est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques.

Question 5/2 : au vu de la matrice A, que dire de plus de la projection ?

III.2.5 Matrice dans une base adaptée

1. On considère p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur un plan P parallèlement à une droite D non inclue dans P. On note $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base adaptée à $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$. Donner la matrice de p dans $\mathcal{B}$.

2. Même question dans le cas général $E = F \oplus G$.

III.2.6 Exemple
On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \frac{A+{}^tA}{2} \end{array} \right.$. il s'agit, d'après le point I.2.7 de la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

III.2.7 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E

1. Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction G. Alors :
   — $s \in GL(E)$ et $s^2 = Id_E$ ie. $s = s^{-1}$
   — $F = \ker(s - Id_E) = \{x \in E | \ s(x) = x\}$
   — $G = \ker(s + Id) = \{x \in E | \ s(x) = -x\}$
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $f^2 = Id_E$ alors f est la symétrie par rapport à $\ker(f - Id_E)$ parallèlement à $\ker(f + Id_E)$ qui sont donc supplémentaires dans E.

III.2.8 Exemple
Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'application s qui à une fonction f associe $s(f) : x \mapsto f(-x)$ est une symétrie. C'est la symétrie par rapport aux fonctions paire parallèlement aux fonctions impaires.

III.2.9 Matrice dans une base adaptée

Donner, avec les notations du théorème, la matrice de s dans une base adaptée à $E = F \oplus G$.

III.2.10 Exemple
Remarquons que la transposition est une symétrie. C'est même la symétrie associée au projecteur de l'exemple III.2.6

III.3 Projection et espaces en somme directe

III.3.1 Définition
Soient $F_1, \dots F_p$ des sous-espaces de E vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Pour $x \in E$, on pose $x = x_1 + \cdots + x_p$ l'unique décomposition en somme telle que $\forall i \in [\![1,p]\!] x_i \in F_i$.

Le projeté du vecteur x sur F_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} F_i$ est le vecteur x_j. Le projecteur associé est $p_j : x \mapsto x_j$.

III.3.2 Remarque

Si la somme directe des F_i n'est pas égale à l'espace E global, on peut se ramener à la définition en considérant plutôt $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ comme espace dans lequel on projette.

III.3.3 Proposition
Avec les notations de la définition précédente

1. $\forall (k,l) \in [\![1,p]\!]^2 \ k \neq l \Rightarrow p_k \circ p_l = 0$
2. $\sum_{j=1}^{p} p_j = Id_E$.

III.3.4 En pratique

Pour déterminer ces projections, on procède comme dans le cas d'espaces supplémentaires :

1. calcul de coordonnées dans une base adaptée si possible, et on regroupe par espace.
2. analyse/synthèse s'il le faut.