Devoir maison 7

A rendre le au plus tard le 10/11/2020.

Exercice 1
Pour a, b deux nombres **complexes**, on considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f_{a,b}(z) = az + b\overline{z}.$$

On considère également la fonction $g_{a,b}$ qui à tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z associe le vecteur v d'affixe complexe $f_{a,b}(z)$.

1. Rappeler la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel et donner une base.
2. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ noté sous forme algébrique, et en posant de bonnes notations pour a, b, évaluer $f_{a,b}(z)$ sous forme algébrique.
3. Montrer que $g_{a,b}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
4. On note $G = \{g_{a,b};\ (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$. Montrer que G est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
5. (Bonus) Montrer que $G = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. On pourra s'intéresser à la famille $(g_{1,0}, g_{i,0}, g_{0,1}, g_{0,i})$.
6. Reconnaître sans justification $g_{a,b}$ lorsque que :
   (a) $a \in \mathbb{R}^*,\ b = 0$.
   (b) $a = e^{i\theta},\ b = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
   (c) $(a, b) = (0, 1)$.
7. On considère le cas où $a = 0, b = e^{i\theta}$, pour un $\theta \in \mathbb{R}$
   (a) Trouver l'ensemble des points fixes de $g_{a,b}$.
   (b) Calculer $g_{a,b}^2$.
   (c) En déduire que $g_{a,b}$ est bijective et expliciter sa réciproque.
   (d) Question 5/2 : quelle est l'interprétation géométrique de $g_{a,b}$?

Indications :

1.
2. Poser les formes algébriques de a et b. Attention au fait que ce ne sont pas des réels.
3. $g_{a,b}$ est une fonction qui prend comme argument une colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui correspond à un certain nombre complexe. On pourra éventuellement calculer au passage la matrice de $g_{a,b}$ dans la base canonique.
4. Méthode !
5. Encore une fois, on peut raisonner sur les matrices
6. Il s'agit de révisions du cours de première année liant les nombres complexes et la géométrie.
7. (a) Un point fixe est un vecteur $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $g_{a,b}(X) = X$. On pourra passer par les nombres complexes pour résoudre l'équation.
   (b) On demande une application linéaire.
   (c)
   (d)