Devoir maison 8

A rendre le au plus tard le 17/11/2020.

Exercice 1

Posons $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1. On note $F = \{AB - BA |\ (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2\} = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})|\ \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\ C = AB - BA\}$.
   (a) Donner un exemple explicite d'une matrice non nulle de F dans le cas $n = 2$.
   (b) Montrer que $F \subset \ker(\mathrm{tr})$.
   (c) On note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$ pour $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$.
   (d) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ des entiers distincts. Montrer que $E_{i,i} - E_{j,j}$ et $E_{i,j}$ sont dans F. Qu'en déduire pour la dimension de F ?
   (e) Déterminer $\dim(\ker(\mathrm{tr}))$ et en déduire que $F = \ker(\mathrm{tr})$.
   (f) Est-ce que $I_n \in F$?
2. On note $E = \{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})|\ \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2\ f(AB) = f(BA)\}$. Les éléments de E sont ainsi des formes linéaires.
   (a) Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donner en plus un élément non nul de E.
   (b) Soit $f \in E$. Montrer que $\ker(\mathrm{tr}) \subset \ker(f)$.
   (c) (*) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{tr}$.
   (d) Déterminer une base et la dimension de E.

Cet exercice démontre un résultat intéressant : la propriété qui permet de montrer que deux matrices semblables ont la même trace (aller re-jeter un oeil à ce cours par la même occasion) est en fait caractéristique de la trace parmi les formes linéaires (à une constante multiplicative près, seule la trace possède cette propriété).

Indications :

1. (a) Il s'agit de trouver un exemple de matrice de F, c'est à dire des matrices A, B telles que $AB - BA \neq 0$.
   (b) Nous avons une méthode très générale pour montrer une inclusions : Soit $C \in F$. Montrons que $C \in \ker(\mathrm{tr})$....
   (c)
   (d) Voir la question 1a pour montrer qu'un élément est dans F. Pour la dimension, on compte les éléments d'une famille à condition qu'elle soit libre, et on trouve une inégalité.
   (e) On veut la dimension d'un noyau. Deux méthodes : expliciter ce noyau en résolvant une équation homogène ou utiliser un théorème...
   (f)
2. (a) Nous avons revu la méthode générale.
   (b) Encore une inclusion
   (c) On pourra utiliser la proposition 6 des notes de cours de compléments.
   (d) On vient de décrire tous les éléments de E....