

Exercice 1

Assurez-vous de savoir prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel (par exemple

$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0 \right\}$) et qu'une fonction donnée est une application linéaire (par

exemple $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto P(\pi) \end{cases}$)

Exercice 2

On croise différents types d'objets en algèbre linéaire, et le vocabulaire qui s'y rapporte est précis. Compléter le tableau suivant par des ✓ ou ✗ suivant que le mot peut s'appliquer ou non au type d'objet correspondant.

	Matrice	famille	espace vectoriel	application linéaire
Rang				
Trace				
Dimension				
Libre				
Stable				
Déterminant				

Exercice 3

On considère un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n , (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E . Soit également $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Suivant la colonne du tableau à suivre, on considère que M est la matrice de (u_1, \dots, u_n) ou alors la matrice de f , à chaque fois dans la base \mathcal{B} . Compléter les deux colonnes vides (éventuellement par ✗) par l'interprétation pour l'objet correspondant à la colonne de chaque propriété de la matrice M .

Pour la matrice M	Pour la famille (u_1, \dots, u_n)	Pour l'application f
$M \in GL_n(\mathbb{K})$		
$\text{rg}(M)$		
$\det(M)$		
$\text{tr}(M)$		
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(M)$		
M^2		

Exercice 4

On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $(X^2, (X-1)^2, (X-2)^2)$ est libre dans E .

Exercice 5

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On pose $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

- Rappeler la définition sous forme d'ensemble de $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$. On veut obtenir $\ker(f) = \{ \dots \}$.
- ¹ On note $h = f \circ g$. Montrer que $\ker(g) \subset \ker(h)$.
- Question facultative : à quelle condition (portant sur les noyaux et images de f et g) a-t-on $\ker(h) = \ker(g)$?
- On suppose dans cette question que $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\text{Im}(g) \subset \ker(f)$.

1. Rappel : dans le cas général, pour montrer l'inclusion d'ensembles $A \subset B$, on pose $x \in A$ et on montre que $x \in B$ en utilisant l'hypothèse que $x \in A$.