Table des matières

I Intégrales convergentes

I.1 Intégrales impropres

Définition 1
Soient $a <$ $\boxed{\text{b} \leqslant +\infty}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction **continue**.

Si $\lim\limits_{x\to b} \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

Définition 2
Soient $\boxed{\text{-}\infty \leqslant \text{a}}$ $< b$ et $f \in \mathcal{C}(]a,b],\mathbb{R})$.

Si $\lim\limits_{x\to a} \int\limits_x^b f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

Proposition 1 (Linéarité des intégrales convergentes)

Soients $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ continues. Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent toutes les deux alors pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ converge également et on a

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Définition-Proposition 1
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ (on peut avoir $a = -\infty$ et / ou $b = +\infty$). Soit $f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R})$.

S'il existe un $c \in]a,b[$ tel que $\int\limits_a^c f$ et $\int\limits_c^b f$ sont des intégrales convergentes alors on dit que $\int\limits_a^b f$ converge.

Dans ce cas on a $\forall c' \in]a,b[\ \int\limits_a^{c'} f + \int\limits_{c'}^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$ et on note cette valeur $\int\limits_a^b f$.

Proposition 2
On se place dans le cas $f \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$ (ce n'est pas $+\infty$). Si on peut prolonger f par continuité en b (on note $\tilde{f}$ le prolongement), alors l'intégrale $\int\limits_a^b f$ converge et sa valeur est $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$ (qui est une intégrale sur un segment).

Le résultat est encore vrai lorsque c'est la borne inférieure qui est ouverte, voire lorsque les deux le sont, si on peut prolonger à chaque borne.

I.2 Fonctions positives

Proposition 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 0$.

Dans le cas de convergence, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

Théorème 1 (Intégrales de)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 1$.
2. $\int\limits_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha < 1$.

Théorème 2 (Comparaison des fonctions positives)
Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ des fonctions **positives**.

1. Si $f \leqslant g$ au voisinage de b et $\int\limits_a^b g$ converge alors $\int\limits_a^b f$ converge.

2. Si $f = O_b(g)$ et $\int\limits_a^b g$ converge alors $\int\limits_a^b f$ converge.

3. Si $f = o_b(g)$ et $\int\limits_a^b g$ converge alors $\int\limits_a^b f$ converge.

4. Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\int\limits_a^b f$ et $\int\limits_a^b g$ sont de même nature.

Le résultat vaut encore pour des fonctions continues et positives sur $]a, b]$, à condition de prouver des relations de comparaison (ou une inégalité) en a...

Proposition 4
Soit $f \in \mathcal{C}([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$. Si on a les 3 propriétés sur f :
- f est positive,
- $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge,
- f possède une limite ℓ en $+\infty$

alors $\ell = 0$.

I.3 Lien avec les séries

Théorème 3
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ (avec $n_0 \in \mathbb{N}$) une fonction **continue, positive et décroissante.**

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ ont la même nature}$$

II Intégrabilité

II.1 Fonctions intégrables

Définition 3
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On dit que f est **intégrable** sur I ssi $\int\limits_I |f|$ converge.

Théorème 4
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. SI f est intégrable sur I ALORS $\int_I f$ converge.

II.2 Propriétés des fonctions intégrables

Proposition 5
$L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : toute combinaison linéaire de fonction intégrable est encore intégrable.

Théorème 5
1. Soit $f \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ une fonction continue positive et intégrable sur I. Si $\int_I f = 0$ alors $\forall x \in I\ f(x) = 0$.
2. Soit $f \in L^1(I, \mathbb{K})$. Si $\int_I |f| = 0$ alors $\forall x \in I\ f(x) = 0$.

Proposition 6
Si $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ est bornée en module par $M \in \mathbb{R}^+$ (c'est à dire $\forall t \in I\ |f(t)| \leqslant M$) et g est intégrable sur I alors $fg \in {}^1(I, \mathbb{K})$ et $\left|\int\limits_I fg\right| \leqslant M \int\limits_I |g|$.

III Outils de calcul

III.1 Changement de variable

Théorème 6
Soient $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante. $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales quand elles convergent.

III.2 Intégration par parties

Théorème 7
Soient $u, v : [a, b[\to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $\lim\limits_{x \to b^-} u(x)v(x)$ existe et est finie alors $\int\limits_a^b u'v$ et $\int\limits_a^b uv'$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

où on a noté $[uv]_a^b = \lim\limits_{x \to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.