Table des matières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Intégrales convergentes

Le cadre d'étude change : on considère toujours des fonctions continues, plus seulement sur des segments mais des intervalles quelconques.

I.1 Intégrales impropres

I.1.1 Définition

Soient $a < \boxed{b \leqslant +\infty}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction **continue**.

Si $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

I.1.2 Remarque

On ne se préoccupe pas de la valeur de a, la borne inférieure du moment que l'intervalle de continuité est fermé en cette borne.

Ainsi, si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_4^{+\infty} f$ entre autre.

I.1.3 Exemple

Convergence + calcul de la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}t$.

I.1.4 Définition

Soient $\boxed{-\infty \leqslant a} < b$ et $f \in \mathcal{C}(]a,b],\mathbb{R})$.

Si $\lim\limits_{x\to a} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

I.1.5 Exemple (A savoir refaire)

Montrons que $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge et donnons sa valeur.

- $\ln \in \mathcal{C}(]0,1],\mathbb{R})$ (ie. le “problème” est en 0).
- Soit $x > 0$. $\int_x^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1 - x\ln(x) + x \underset{x\to 0}{\to} -1$
- Conclusion : $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente et sa valeur est -1.

I.1.6 Proposition (Linéarité des intégrales convergentes)

Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ continues. Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent toutes les deux alors pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ converge également et on a

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Preuve.
Simple retour à la définition. On remplace b par $x \in [a,b[$ pour intégrer sur un segment. La linéarité de l'intégrale s'applique alors et le théorème est une conséquence de du théorème de combinaison linéaire de limites finies. ∎

I.1.7 Définition-Proposition

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ (on peut avoir $a = -\infty$ et / ou $b = +\infty$). Soit $f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R})$.

S'il existe un $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont des intégrales convergentes alors on dit que $\int_a^b f$ converge.

Dans ce cas on a $\forall c' \in]a,b[\ \int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ et on note cette valeur $\int_a^b f$.

Preuve.
On a, par limite d'une somme (une intégrale convergente et une constante), $\int_a^c f = \int_a^{c'} f + \int_{c'}^c f$. De même $\int_c^b f = \int_c^{c'} f + \int_{c'}^b f$. Finalement, l'égalité demandée est vérifiée. ■

I.1.8 Interprétation graphique

On peut continuer à voir une intégrale impropre comme une aire, mais cette fois comme l'aire limite d'un partie non nécessairement bornée.

I.1.9 Exemple
Montrer la convergence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

I.1.10 Coin-culture

L'intégrale suivante est d'importance fondamentale en probabilité : $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

I.1.11 Proposition
On se place dans le cas $f \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$ (ce n'est pas $+\infty$). Si on peut prolonger f par continuité en b (on note $\tilde{f}$ le prolongement), alors l'intégrale $\int\limits_a^b f$ converge et sa valeur est $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$ (qui est une intégrale sur un segment).

Le résultat est encore vrai lorsque c'est la borne inférieure qui est ouverte, voire lorsque les deux le sont, si on peut prolonger à chaque borne.

Preuve.
Soit $F_1 : x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ la primitive de f sur $[a,b[$ qui s'annule en a et $F_2 : x \mapsto \int\limits_a^x \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$ la primitive de $\tilde{f}$ sur $[a,b]$ qui s'annule en a, alors $\forall x \in [a,b[\ F_1(x) = F_2(x)$ et F_2 est continue sur $[a,b]$. F_2 est donc le prolongement par continuité de F_1 et on a bien $F_1(x) \underset{x\to b}{\to} F_2(b) = \int\limits_a^b \tilde{f}$. ■

I.1.12 Exemple
Montrer que $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ converge. Posons $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ qui est continue sur $]0,1[$ (et donc on a deux études de convergence à faire.)

— Etude en 0. On a $t-1 \underset{0}{\to} -1$ et $\ln(t) \underset{0}{\to} -\infty$ donc $f(t) \underset{0}{\to} 0$ et on peut prolonger f par continuité en 0.

— Etude en 1. On a $\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$ car $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi $f(t) \underset{1}{\to} 1$ et on peut prolonger f par continuité en 1.

Finalement, $\int_0^1 f$ converge.

I.2 Fonctions positives

Dans cette partie, nous ne considérons que des fonctions positives. On ne considère pas les cas où il y a des “compensations” d'aire.

I.2.1 Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 0$.

Dans le cas de convergence, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

Preuve.
Intégrer jusqu'à $x > 0$ et un simple calcul de primitive conclut. ■

I.2.2 Théorème (Intégrales de)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 1$.
2. $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha < 1$.

Preuve.

1. Soit $x > 1$. $\int\limits_1^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = [\frac{t^{-\alpha+1}}{(1-\alpha)}]_1^x$ si $\alpha \neq 1$ et $[\ln(t)]_1^x$ si $\alpha = 1$.

   Dans le cas $\alpha = 1$ on a donc une intégrale divergente.

   Pour $\alpha \neq 1$, $x^{-\alpha+1} \underset{x\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 1 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 1 \end{cases}$. On retrouve bien le résultat annoncé. Remarque : si $\alpha < 1$ alors $\frac{1}{t} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^\alpha})$ et le théorème de comparaison nous assure de la divergence de l'intégrale de Riemann concernée.

2. Soit $x \in]0,1[$. Le même calcul de primitive vaut encore. Comme $\ln(x) \underset{0}{\to} -\infty$, $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge et le théorème de comparaison nous assure que $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ diverge dès que $\alpha \geqslant 1$ (en 0, les comparaisons de puissances sont inverses de celles en $+\infty$).

   Cette fois, $x^{-\alpha+1} \underset{x\to 0}{\to} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha < 1 \\ +\infty \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$ et on retrouve le résultat de convergence. ■

I.2.3 Théorème (Comparaison des fonctions positives)
Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ des fonctions **positives**.

1. Si $f \leqslant g$ au voisinage de b et $\int\limits_a^b g$ converge alors $\int\limits_a^b f$ converge.
2. Si $f = O_b(g)$ et $\int\limits_a^b g$ converge alors $\int\limits_a^b f$ converge.
3. Si $f = o_b(g)$ et $\int\limits_a^b g$ converge alors $\int\limits_a^b f$ converge.
4. Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\int\limits_a^b f$ et $\int\limits_a^b g$ sont de même nature.

Le résultat vaut encore pour des fonctions continues et positives sur $]a,b]$, à condition de prouver des relations de comparaison (ou une inégalité) en a...

Preuve.

1. Plaçons nous sur un intervalle $[c,b[$ où $f \leqslant g$. Les intégrales $\int\limits_a^b f$ et $\int\limits_c^b f$ ont la même nature.

   Pour $x \in [c,b[$ on a, par croissance de l'intégrale sur un segment (on intègre “dans le bon sens”), $\int\limits_c^x f \leqslant \int\limits_c^x g$. Or $x \mapsto \int\limits_c^x g$ est croissante et possède une limite finie, donc est toujours inférieure à cette limite.

   Ainsi $x \mapsto \int\limits_c^x f$ est croissante ($f \geqslant 0$) et majorée donc possède une limite finie en b (la borne supérieure de son intervalle de définition). Ainsi $\int\limits_c^b f$ converge (et est $\leqslant \int\limits_c^b g$) et donc $\int\limits_a^b f$ converge.

2. Dans le cas où $f = O_b(g)$ on a $f \leqslant Mg$ au voisinage de b pour un $M \in \mathbb{R}+$ fixé.

   Par produit d'une limite par une constante, $\int\limits_a^b Mg(t)\mathrm{d}t$ converge et par la point précédent, $\int\limits_a^b f$ converge.

3. On a dans ce cas $f = O_b(g)$
4. On a dans ce cas $f = O_b(g)$ et $g = O_b(f)$. ■

I.2.4 Négligeabilité

Si on a $f = o_b(g)$ et $\int\limits_a^b g$ converge alors $\int\limits_a^b f$ converge. Dans la pratique, on utilisera très souvent ce fait.

Exemple : $\frac{1}{t^t} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ donc $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^t}dt$ converge par comparaison de fonctions positives.

I.2.5 Divergence

On peut tout à fait appliquer les contraposées des points 1 et 2 pour prouver la divergence d'une intégrale d'une fonction positive. Par exemple, si $f = o_b(g)$ et $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge (raisonnement par l'absurde).

I.2.6 $t^\alpha f(t)$

1. En 0 Pour la convergence en 0, si $t^{\frac{1}{2}}f(t) \underset{0}{\to} 0$ ou plus généralement $t^{1-\varepsilon}f(t) \underset{0}{\to} 0$ pour un $\varepsilon > 0$ fixé alors l'intégrale de f converge en 0 (si f est positive...)
2. En $+\infty$ si $t^2 f(t) \underset{+\infty}{\to} 0$ ou plus généralement $t^{1+\varepsilon}f(t) \underset{+\infty}{\to} 0$ alors l'intégrale de f converge en $+\infty$.

I.2.7 Application à la preuve de divergence

On suppose toujours f positive.

En $a=0$ comme en $a=+\infty$, si on a $tf(t) \underset{t\to a}{\to} +\infty$ on peut conclure à la divergence de l'intégrale de f. Par exemple $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ diverge.

I.2.8 Exemple

Discuter suivant la valeur de $\beta \in \mathbb{R}$ la convergence de de $\int_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

On pose $f_\beta : t \mapsto t^{\beta-1}e^{-t}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$ dans le cas général (pas en 0, à cause du cas $\beta-1<0$). Alors $f_\beta(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ car $t^2 f_\beta(t) \underset{+\infty}{\to} 0$. Ainsi l'intégrale converge en $+\infty$ par comparaison de fonctions positives.

En 0, on a $f_\beta(t) \sim t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$. L'intégrale converge ssi $\alpha > 0$ d'après le théorème précédent et par comparaison de fonctions positives.

I.2.9 Exemple

Montrer (enfin !) que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Le calcul de la valeur est un exercice classique.

Preuve.

Voici une preuve en plusieurs étapes.

— Montrons que $\forall x > -1 \ \ln(1+x) \leqslant x$ (avec égalité seulement en 0).

Remarquons d'abord que $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$, ce qui nous permettra d'utiliser l'inégalité des accroissements finis. De plus sa dérivée est $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui est décroissante sur $]-1,+\infty[$

Si $x>0$, on a $f'(x) \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leqslant f'(0)$ ce qui donne $\frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$ qui est CQFD. Si $x<0$, on a $f'(1) \leqslant \frac{f(0)-f(x)}{0-x} \leqslant f'(x)$ ou encore $1 \leqslant \frac{-\ln(1+x)}{-x}$ ou encore $-x \leqslant -\ln(1+x)$ car $-x>0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $t \in [0,\sqrt{n}[$, on a alors $\pm\frac{t^2}{n} \in]-1,+\infty[$ et donc $\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n}$ et $\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n}$.

Ainsi, $n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant -t^2 \leqslant -n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)$. En passant à l'exponentielle qui est croissante,

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

— La relations qui précède est encore vraie pour $t=\sqrt{n}$, et en intégrant on obtient :

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t}_{I_1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t}_{I_2}$$

En posant $t=\sqrt{n}\cos(u)$ dans I_1 (possible d'après les valeurs prises par t), on a $\mathrm{d}t = -\sqrt{n}\sin(u)\mathrm{d}u$ et donc $I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sqrt{n}\sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u$.

En posant $u=\sqrt{n}\tan(u)$ dans I_2 on obtient $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(u)\mathrm{d}u$ car $1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2} = \tan'$.

— Si on note $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$ (par changement de variable $\frac{\pi}{2}-t$), on a $I_2 \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$ (car on intègre une fonction positive sur un segment plus petit) et donc

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$$

D'après l'étude des intégrales de Wallis, $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et par encadrement $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ∎

I.2.10 Fonctions négatives

Toute cette partie s'applique en remplaçant "positive" par "négative". L'important ici est que f ne change pas de signe. La seule différence est qu'il faut juste inverser l'inégalité du premier point du théorème de comparaison.

I.2.11 Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$. Si on a les 3 propriétés sur f :

— f est positive,

— $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge,

— f possède une limite ℓ en $+\infty$

alors $\ell = 0$.

Preuve.
Supposons que ℓ existe. Si on avait $\ell > 0$, alors pour un certain $A > 0$ on aurait $\forall t \geqslant A\ f(t) \geqslant \frac{\ell}{2}$ (imposer $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ dans le cas d'une limite finie, réfléchir au cas $\ell = +\infty$). Mais alors pour $x \geqslant A$ on a $\int\limits_A^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant (x-A)\frac{\ell}{2}$. Or $\int\limits_A^x f \leqslant \int\limits_a^{+\infty} f$ car f est positive.

Contradiction. ∎

I.3 Lien avec les séries

I.3.1 Théorème
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ (avec $n_0 \in \mathbb{N}$) une fonction **continue, positive et décroissante.**

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ ont la même nature}$$

Preuve.
Pour un $N > n_0$ on a, (faire un schéma. La preuve est la décroissance de f et la croissance de l'intégrale), $\int\limits_{n_0+1}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum\limits_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int\limits_{n_0}^{N} f(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi la suite des sommes partielle est majorée ssi $x \mapsto \int\limits_{n_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est majorée (il suffit de majorer les valeurs aux entiers car cette fonction est croissante). ∎

I.3.2 Exemple
On prouve de cette manière la convergence et la divergence des séries de Riemann.

I.3.3 Application aux séries divergentes

On souhaite donner un équivalent de $\ln(n!) = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln(k)$.

Or, pour $k \geqslant 2$, $\int\limits_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k) \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$ car ln est croissante sur $[k-1, k]$ et sur $[k, k+1]$.

En sommant de 2 à n on obtient $\int\limits_{1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(n!) \leqslant \int\limits_{2}^{n+1} \ln(t)\mathrm{d}t$ ie $n\ln(n) - n + 1 \leqslant n! \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln(2) + 2$.

On en tire classiquement $\ln(n!) = n\ln(n) - n + o_{+\infty}(n)$.

I.3.4 Restes d'une série convergente

On cherche un équivalent de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Avec $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ on a (cf DM) $S_n + R_n = \frac{\pi^2}{6}$ et donc $|S_n - \frac{\pi^2}{6}| = |R_n|$ où $R_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. R_n représente en fait la qualité de l'approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ par la somme finie S_n.

Pour $k > n$ (on fixe $n \geqslant 1$ pour l'instant), on a classiquement $\int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ et en sommant de $n+1$ à $+\infty$, $\int\limits_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int\limits_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Or $\int\limits_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$ et donc $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ (multiplier l'encadrement par n + théorème d'encadrement).

II Intégrabilité

II.1 Fonctions intégrables

II.1.1 Définition
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On dit que f est **intégrable** sur I ssi $\int\limits_I |f|$ converge.

II.1.2 Exemple
Etudier l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$.

II.1.3 Remarque

Pour les fonction positives ou négatives, l'intégrabilité et le fait que l'intégrale converge est équivalent. C'est faux pour des fonctions qui changent de signe ou des fonctions à valeurs complexes.

II.1.4 Théorème
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. SI f est intégrable sur I ALORS $\int_I f$ converge.

Preuve.

— Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Notons $f_+ : x \mapsto \max(f(x), 0)$ et $f_- : x \mapsto \min(f(x), 0)$ les fonctions qui valent respectivement $f(x)$ ou 0 suivant que $f(x)$ est positif ou négatif.

Alors $f = f_+ + f_-$ et $|f| = f_+ - f_-$. Si on suppose que f est intégrable sur I, vu que $f_+ \leqslant |f|$ et $-f_- \leqslant |f|$, les intégrales de f_+ et $-f_-$ convergent et par combinaison linéaire l'intégrale de $f_+ - (-f_-) = f$ converge.

— Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Notons $f = u + iv$ la forme algébrique de f. Alors $|u| \leqslant |f|$ et $|v| \leqslant |f|$. Par comparaison de fonctions à valeurs positives, u, v sont d'intégrales convergentes sur I et donc $f = u + iv$ aussi. ■

II.1.5 Contre-exemple

(admis pour l'instant), $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$ converge, mais la fonction n'est pas intégrable.

II.1.6 METHODE

Pour montrer l'intégrabilité de f sur I :

1. Trouver la ou les bornes ouvertes de I pour savoir où étudier f.
2. Rechercher un éventuel prolongement par continuité.
3. rechercher un équivalent de $|f|$ qui soit intégrable ou prouver que $|f|$ est négligeable devant une fonction intégrable.
4. majorer $|f|$ (au voisinage du point à problème s'il le faut) par une fonction intégrable.

II.1.7 Exemple

1. Etudier l'intégrabilité sur $]0, 1]$ de $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$.
2. Etudier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de $t \mapsto \ln(1 + \frac{1}{t}) - \frac{1}{t}$.
3. Etudier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$.

II.2 Propriétés des fonctions intégrables

II.2.1 Notation

L'ensemble des fonctions continues et intégrables définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $L^1(I, \mathbb{K})$.

II.2.2 Proposition
$L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : toute combinaison linéaire de fonction intégrable est encore intégrable.

Preuve.

1. La fonction nulle est clairement intégrable sur I et son intégrale vaut 0.
2. Soient $f, g \in L^1(I, \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

   Montrons que $\lambda f + \mu g$ est encore intégrable. Comme $|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda||f| + |\mu||g|$ on peut se ramener au cas où f, g sont des fonctions à valeurs réelles et positives (par comparaison de fonctions positives).

   Supposons donc que $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ sont intégrables (le raisonnement est similaire en a). On a, pour $x \in [a, b[$, $\int\limits_a^x (\lambda f + \mu g) = \lambda \int\limits_a^x f + \mu \int\limits_a^x g$ qui converge bien quand $x \to b^-$ par combinaison linéaire de limites finies. ■

II.2.3 Théorème

1. Soit $f \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ une fonction continue positive et intégrable sur I. Si $\int_I f = 0$ alors $\forall x \in I\ f(x) = 0$.
2. Soit $f \in L^1(I, \mathbb{K})$. Si $\int_I |f| = 0$ alors $\forall x \in I\ f(x) = 0$.

Preuve.
Pour prouver le premier point, remarquons que si $x \in I$ alors il existe un segment $[a, b] \subset I$ tel que $x \in [a, b]$.

De plus, comme f est positive, $0 \leqslant \int\limits_{[a,b]} f \leqslant \int\limits_I f = 0$

Or ce théorème est vrai quand I est un segment. Pour $x \in I$, il suffit d'appliquer le cours de 1ère année pour prouver que f est nulle sur un segment $[a, b]$ qui contient x et donc $f(x) = 0$. ■

II.2.4 Exemple
On pose, pour $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\varphi(f, g) = \int\limits_0^1 fg$. Montrer que $\varphi(f, f) \geqslant 0$ et $\varphi(f, f) = 0$ ssi la fonction f est la fonction nulle.

Exo : montrer en plus que φ est symétrique ($\varphi(f, g) = \varphi(g, f)$) et bilinéaire.

II.2.5 Proposition
Si $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ est bornée en module par $M \in \mathbb{R}^+$ (c'est à dire $\forall t \in I\ |f(t)| \leqslant M$) et g est intégrable sur I alors $fg \in Ł^1(I, \mathbb{K})$ et $\left|\int_I fg\right| \leqslant M \int_I |g|$.

Preuve.
Notons a et b les bornes de I, $a < b$ On a d'abord $|fg| \leqslant M|g|$ donc $|fg| = O_a(|g|)$ et $|fg| = O_b(|g|)$ donc fg est intégrable sur I par comparaison de fonctions positives.

De plus, pour $c, d \in I$, avec $a < c < d < b$, $\left|\int_c^d fg\right| \leqslant M \int_c^d |g|$. Faisons tendre c vers a (la fonction $|.|$ est continue sur $\mathbb{R}$), on obtient $\left|\int_a^d fg\right| \leqslant M \int_a^d |g|$ par passage à la limite des inégalités larges.

On procède de même en b. ■

II.2.6 ATTENTION

L'hypothèse "f est bornée" n'est pas superflue. Dans le cas général un produit de fonctions intégrables n'est pas intégrable. Prendre $f = g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0, 1]$.

II.2.7 Exemple
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-n^2(1+t^2))}{1+t^2} \mathrm{d}t$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ si elle existe.

Remarquons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé on a $\forall t \in \mathbb{R}^+ \exp(-n^2(1 + t^2)) \leqslant e^{-n^2}$. Ainsi $0 \leqslant u_n \leqslant e^{-n^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t$ et $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ par encadrement.

III Outils de calcul

III.1 Changement de variable

III.1.1 Théorème
Soient $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante.

$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales quand elles convergent.

Preuve.
Soient $c, d \in]\alpha, \beta[$. On a $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ avec $c \to \alpha \iff \varphi(c) \to a$.

Ainsi les intégrales convergent simultanément en a et α. ■

III.1.2 Cas d'un changement décroissant

Si φ est supposée décroissante, on a alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$

III.1.3 Exemple
Etudier la convergence et "calculer" $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

En effectuant le changement $t = u^2$ (bijectif sur $\mathbb{R}_+^*$) donc $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$ on obtient $2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} = \sqrt{\pi}$.

III.1.4 Exemple
Calculer la valeur de $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \mathrm{d}t$

Posons $t = u^2$ et donc $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$. Alors $I = \int_0^1 \frac{2u}{u\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u = 2[\arcsin(u)]_0^1 = \pi$.

III.2 Intégration par parties

III.2.1 Théorème
Soient $u, v : [a, b[\to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $\lim\limits_{x \to b^-} u(x)v(x)$ existe et est finie alors $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

où on a noté $[uv]_a^b = \lim\limits_{x \to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

Preuve.
Immédiat d'après le cours de sup, en passant par des intégrales sur $[a, x]$. ∎

III.2.2 Remarque

On peut étendre ce théorème à $]a, b]$ et même à $]a, b[$ (dans ce cas le crochet est la différence de deux limites).

III.2.3 En pratique

On reviendra toujours à une intégrale sur un segment $[a, x]$ pour effectuer une intégration par parties puis on fait tendre x vers b. En effet, on ne connaît pas a priori la fonction u ni la limite de uv.

III.2.4 Exemple (Intégrale de Dirichlet)

Montrons que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Soient $\varepsilon > 0$ et $A > \varepsilon$. Les fonctions en jeu étant $\mathcal{C}^1$, on a

$$\int\limits_{\varepsilon}^{A} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[(1-\cos(t)) \times \frac{1}{t}\right]_{\varepsilon}^{A} + \int\limits_{\varepsilon}^{A} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

La limite du crochet quand $t \to 0$ est 0 et également quand $t \to +\infty$.

De plus, $\forall t > 0$ $\left|\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ donc l'intégrale de droite converge quand $A \to +\infty$. En 0, on a un prolongement par continuité dans les deux intégrales.

Finalement, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge et on a même $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

III.2.5 Exemple

Calculer $\int\limits_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t$.

III.2.6 Contre-exemple

$t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

Ceci montre que dans une IPP, les deux intégrales sont de même nature, mais l'intégrabilité (en valeur absolue donc) de l'une ne présage rien de l'intégrabilité de l'autre...

III.2.7 Exemple

Reprenons I.2.8. On pose, pour $\beta > 0$, $\Gamma(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Donnons un lien entre $\Gamma(\beta+1)$ et $\Gamma(\beta)$

On a, pour $a > 0$ et $b > a$, $\int\limits_a^b t^{\beta}e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^{\beta}e^{-t}\right]_a^b + \int\limits_a^b \beta t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Comme le crochet tend vers 0 en 0 et $+\infty$ ($\beta > 0$), $\Gamma(\beta+1) = \beta\Gamma(\beta)$.

De plus, $\Gamma(1) = 1$ et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Index